JAN

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 181

Heft 4

Ausgegeben am 8. Januar 1940

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin 1940

Band 181. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Haupt, Otto und Georg Nöbeling und Christian Pauc, Über Abhängigkeitsräume	193
Kowalewski, Gerhard, Zur Cesàro-Pickschen Geometrie	218
Bachmann, Friedrich, Die Bewegungsgruppe einer ebenen Cayleyschen Geometrie	242

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Schriftleitung unter der Anschrift:
An die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Über Abhängigkeitsräume.

Von *Otto Haupt* und *Georg Nöbeling* in Erlangen und *Christian Pauc* in Paris.

Einleitung.

Als k-dimensionale lineare Sekante einer Punktmenge M des euklidischen E_m bezeichne man einen k-dimensionalen euklidischen Teilraum des E_m, dessen Durchschnitt mit M ein $(k+1)$-tupel von linear unabhängigen Punkten enthält: $1 \leqq k \leqq m$. Ferner bezeichne man als eine k-dimensionale lineare Grenzsekante S von M einen euklidischen Teilraum des E_m, gegen welchen sich k-dimensionale Sekanten T von M häufen; enthält jede dieser Sekanten T je ein $(k+1)$-tupel t linear unabhängiger Punkte von M derart, daß die t sich gegen *einen* Punkt P von M häufen, so heiße S eine k-dimensionale lineare Paratingente von M in P. In Verfolgung dieser (und anderer) von ihm eingeführten Paratingentenbegriffe hat Herr Bouligand, auf welchen die nachfolgenden Fragestellungen zurückgehen, unter anderem [1]) gezeigt [2]), daß die Menge aller 1-dimensionalen linearen Sekanten und Grenzsekanten eines (einfachen) Bogens ein Kontinuum (im Raume aller Geraden des E_m) bildet. Sodann hat Herr Mirguet [3]) unter anderem bewiesen, daß dies sogar für Kontinua im E_m (statt für Bogen) gilt, nachdem vorher Herr Rabaté [4]) den Fall ebener Kontinua erledigt hatte [1]). Herr Mirguet hat weiter [5]) den Satz für den Fall $m = 3$, $k = 2$ bewiesen [1]). Herr Torrance [6]) hat für gewisse abstrakte „lineare" Räume (an Stelle des E_m) die Fälle $k = 1$ und $k = 2$ behandelt [1]) und (ohne nähere Ausführung) angegeben, daß die meisten seiner Ergebnisse auch für beliebiges $k \geqq 3$ erhalten bleiben. Unabhängig davon haben Haupt und Nöbeling [7]) im euklidischen E_m den Satz für beliebiges k bewiesen und dabei die Gültigkeit ihres Beweises auch für andere als lineare Sekanten bzw. Grenzsekanten (z. B. Kreise, Kugeln) hervorgehoben. Schließlich hat Pauc [8]) eine sehr weitreichende und dabei einfach formulierbare Verallgemeinerung der oben erwähnten Ergebnisse gefunden. Die *eine* Seite dieser Verallgemeinerung besteht

[1]) Sogar für die Menge der betr. Paratingenten in einem beliebig vorgegebenen Punkte P von M.

[2]) G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris (Vuibert) 1932, S. 164.

[3]) J. Mirguet, Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre, Ann. Sci. de l'École Normale Sup. (3) **51** (1934), S. 201ff.

[4]) G. Rabaté, Sur les notions originelles de la géométrie infinitésimale directe, Thèse Toulouse 1931.

[5]) J. Mirguet, Sur la continuité du biparatingent, C. R. Paris **200** (1935), S. 1705ff.

[6]) C. C. Torrance, Tangent lines and planes in topological spaces, Trans. American Math. Soc. **41** (1937), S. 193ff. Auf die Beziehung zwischen unseren Entwicklungen und denen von Herrn Torrance gehen wir nicht näher ein.

[7]) Haupt und Nöbeling, Über die beliebig-dimensionalen Sekanten eines Kontinuums und ihre Limiten, Sitz.-Ber. d. phys.-med. Sozietät zu Erlangen **67** (1935/36), S. 283ff.

[8]) Chr. Pauc, Ensemble des systèmes finis de points d'un continu, C. R. Paris **204** (1937), S. 839ff. Vgl. auch Chr. Pauc, Introduction de directions dans un espace distancié usw., Acad. Royale Belgique Bull. Cl. Sci. (5) **22** (1936), S. 968ff., sowie Chr. Pauc, Directions, contingent et paratingent dans les espaces distanciés, C. R. Paris **203** (1936), S. 153ff.

in einer einfachen Axiomatik der Begriffe „abhängig“ und „unabhängig“. Unter Zugrundelegung dieser Axiomatik, welche rein algebraischer Natur ist, entwickeln wir in vorliegender Arbeit eine Reihe von Eigenschaften, insbesondere Zerlegungseigenschaften solcher „Abhängigkeitsräume“, d. h. solcher Mengen, in welchen eine derartige Abhängigkeit erklärt ist. Diese Entwicklungen sind erforderlich für den oben erwähnten, in einer späteren Arbeit zu veröffentlichenden, Beweis der Kontinuität der beliebig-dimensionalen Sekanten und Grenzsekanten eines Kontinuums in gewissen topologischen Abhängigkeitsräumen. Indes scheint uns die Theorie der Abhängigkeitsräume [9]) auch an und für sich ein gewisses Interesse zu bieten. Übrigens handelt es sich dabei, wie wir sehen werden (§ 7), um die Theorie einer gewissen Klasse von Verbänden, die nicht notwendig modular (Dedekindsche Verbände) sind. Trotzdem formulieren wir — in Rücksicht auf die erwähnte spätere Anwendung — die benötigten Sätze dieser Theorie hier in der Sprache der Abhängigkeitsräume; dabei wird man etwaige Wiederholungen von bereits bekannten Sätzen und von bekannten Überlegungen aus der allgemeinen Verbandstheorie — im Interesse eines lückenlosen Aufbaues — in Kauf nehmen müssen, worauf wir hiermit ein für allemal hinweisen.

§ 1. Abstrakte Abhängigkeit.

1. 1. *Nicht geordnete Punktsysteme.* Der allem Folgenden zugrunde liegende Operationsbereich ist eine nichtleere Menge H, die Grundmenge, deren Elemente Punkte heißen. Unter einer Menge M aus H (Teilmenge von H, in H enthaltene Menge, in *Zeichen* $M < H$) verstehen wir eine Menge, deren Elemente Punkte aus H sind. Die Menge H selbst gilt als eine Teilmenge von H; die *leere Menge* wird ebenfalls als eine in H und jeder Teilmenge von H enthaltene Menge betrachtet. Wie üblich sind für die Teilmengen von H Summe und Durchschnitt eindeutig und ausnahmslos erklärt; für zwei Mengen A und B aus H bezeichnen wir die Summe (Vereinigung) mit $A + B$, den Durchschnitt mit $A \cdot B$; die Differenz $A - B$ ist die Menge aller nicht in B enthaltenen Punkte von A.

Neben den Teilmengen von H (deren Elemente paarweise verschieden sind), betrachten wir die (Punkt-)Systeme *aus* H (Teilsysteme von H, *in H enthaltene Systeme*), d. h. Systeme, bestehend aus *endlich* vielen Punkten von H, die aber nicht notwendig paarweise verschieden zu sein brauchen. Jede endliche Teilmenge von H ist ein System aus H. Insbesondere wird auch die *leere Menge* als ein in H enthaltenes System angesehen

[9]) Spezialfälle liefern die sogen. algebraischen Abhängigkeiten (vgl. Nr. **1** 4, B 9). Unser allgemeiner Abhängigkeitsbegriff (Prädikat „A“) steht übrigens auch in Zusammenhang mit dem Prädikat „Gr“, welches bei Hilbert-Bernays in der Formulierung der Verknüpfungsaxiome der ebenen Geometrie eingeführt wird (D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik **1**, Berlin 1934, S. 5). Zunächst nämlich bringt das Axiom 2) von Hilbert-Bernays zum Ausdruck, daß „Gr“ sich auf die *nicht-geordneten* Tripel von Punkten bezieht, wie dies entsprechend für unser „A“ der Fall ist. Verschärft man ferner unser Koinzidenzaxiom (K) (vgl. im Text Nr. **1**. 2) zu „$A(x_1, x_2)$ gleichbedeutend mit $x_1 = x_2$“, so entsprechen unser Induktionsaxiom (I) bzw. Austauschaxiom (A) den Axiomen 1) bzw. 3) bei Hilbert-Bernays. In diesem Zusammenhange kann noch folgendes bemerkt werden: Die Verknüpfungsaxiome bei Hilbert-Bernays weichen von den in Hilbert, Grundlagen der Geometrie (7. Aufl. Leipzig, 1930, S. 3) benutzten insofern ab, als dort nicht die Punkte und Geraden als zwei Systeme von Dingen zugrunde gelegt, sondern *nur die Punkte als Individuen* genommen werden. Ganz analog läßt sich unser Aufbau der Abhängigkeitstheorie gegenüberstellen ihrem Aufbau im Sinne der Theorie der Verbände (man vgl. z. B. die verbandstheoretische Behandlung der abstrakten projektiven Geometrie bei G. Birkhoff, K. Menger, Ö. Ore (siehe die folgenden Nachweise)): dieser wäre zu vergleichen mit dem Aufbau bei Hilbert, jener mit dem Aufbau bei Hilbert-Bernays (vgl. z. B. G. Birkhoff, Combinatorial relations in projective geometries, Ann. of math. **36** (1935), 743ff.; K. Menger, New foundations of projective and affine geometry, Ann. of math. **37** (1936), 456ff.; Ö. Ore, On the foundation of abstract Algebra, Ann. of math. (2) **36** (1935), 406ff., und **37** (1936), 265ff.; Ö. Ore, L'algèbre abstraite, Actualités sc. et ind. Nr. 362, Paris 1936. Wegen weiterer Schriften siehe Hermes-Köthe, a. a. O. [21])). — Durch Hinzunahme eines algebraisch-topologischen Axioms werden wir in einer zweiten Arbeit entsprechend eine topologische Eigenschaft der Abhängigkeit in euklidischen Räumen, nämlich die Abgeschlossenheit der linearen Mannigfaltigkeiten, verallgemeinern.

und mit S^0 bezeichnet. Sind $x_1, \ldots, x_p$ die in irgendeiner Reihenfolge numerierten Elemente eines Systems S, so schreiben wir $S = [x_1, \ldots, x_p]$. Wir betonen, daß es sich immer um *nicht geordnete* Systeme handelt, daß also zwei Systeme $S = [x_1, \ldots, x_p]$ und $T = [y_1, \ldots, y_q]$ dann und nur dann gleich sind, wenn jeder Punkt aus H in S und T gleich oft vorkommt; insbesondere ist dann $p = q$. Unter der Vielfachheit eines unter den Punkten $x_1, \ldots, x_p$ vorkommenden Punktes x verstehen wir die Anzahl derjenigen x_ν, welche gleich x sind; Punkte der Vielfachheit Eins sollen auch einfache Punkte genannt werden.

Ist $S = [x_1, \ldots, x_p]$ ein beliebiges System aus H, so bezeichnen wir mit $\{x_1, \ldots, x_p\}$ die durch S bestimmte Punktmenge, d. h. diejenige Teilmenge von H, welche jeden Punkt von S (genau einmal) und keinen weiteren Punkt enthält. Es ist also $[x_1, \ldots, x_p]$ von $\{x_1, \ldots, x_p\}$ wohl zu unterscheiden. Beispiel: $[a, a, b, b] \neq [a, b, b, b]$, aber $\{a, a, b, b\} = \{a, b, b, b\} = \{a, b\}$. Es ist $[x_1, \ldots, x_p] = \{x_1, \ldots, x_p\}$ dann und nur dann, wenn jeder Punkt von $[x_1, \ldots, x_p]$ einfach ist; nur in diesem Fall ist also ein System aus H auch Menge aus H, während umgekehrt, wie schon bemerkt, jede endliche Teilmenge von H auch ein System aus H ist.

1. 2. *Abhängige und unabhängige Punktsysteme.* Für alle in H enthaltenen Punktsysteme S sei eine, Abhängigkeit genannte, Eigenschaft erklärt, deren Negation als Unabhängigkeit bezeichnet sei. Insbesondere besitze das leere System S^0 die Eigenschaft der Unabhängigkeit. Hat das System $S = [x_1, \ldots, x_p]$ die Eigenschaft der Abhängigkeit bzw. der Unabhängigkeit, so sagen wir auch, die *Punkte* $x_1, \ldots, x_p$ seien *abhängig* bzw. *unabhängig* und schreiben $A[x_1, \ldots, x_p]$ bzw. $U[x_1, \ldots, x_p]$. Es seien die folgenden Axiome erfüllt:

Koinzidenzaxiom:

(K) Aus $x_1 = x_2$ folgt $A[x_1, x_2]$.

Induktionsaxiom:

(I) Aus $A[x_1, \ldots, x_p]$ folgt $A[x_1, \ldots, x_p, y]$ für alle y.

Austauschaxiom:

(A) Aus $U[x_1, \ldots, x_p]$, $A[x_1, \ldots, x_p, y]$ und $A[x_1, \ldots, x_p, z]$ folgt $A[x_2, \ldots, x_p, y, z]$.

Ist in der Grundmenge H eine den vorstehenden Forderungen genügende Eigenschaft A erklärt, so nennen wir H einen Abhängigkeitsraum, kürzer einen A-Raum, in *Zeichen* $[H; A]$.

Allem Folgenden liegt ein Abhängigkeitsraum $[H; A]$ zugrunde. Soweit keine Mißverständnisse zu befürchten sind, bezeichnen wir ihn oft nur mit H.

1. 3. *Anmerkung.* In gewissen konkreten Fällen ist in einem Raum oder einer Menge eine den Axiomen (K), (I) und (A) genügende „Abhängigkeit“ A bzw. „Unabhängigkeit“ U nur für alle Punktsysteme $[x_1, \ldots, x_p]$ mit $p = 1, \ldots, N$ erklärt, wobei N eine feste natürliche Zahl ist. Indem man durch die Festsetzung $A[x_1, \ldots, x_q]$ für $q > N$ alle mehr als N Punkte enthaltenden Systeme als abhängig erklärt, kann man die vorgegebene Definition der Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit auf alle Systeme des Raumes unter Erhaltung der Axiome (K), (I) und (A) erweitern (vgl. auch Nr. **3.** 3). Damit ist dann der Anschluß an die obige, beliebige p fordernde Definition gewonnen.

1. 4. *Beispiele* solcher $[H; A]$ sind:

B_1. Es ist H der euklidische $E_n (n \geqq 1)$ und $A[x_1, \ldots, x_p]$ bedeutet, daß $x_1, \ldots, x_p$ auf einer $(p-2)$-dimensionalen linearen Teilmannigfaltigkeit des E_n liegen.

B_2. Es ist H der projektive P_n und A wie in B_1 definiert.

B_3. Es ist H der Hilbertsche Raum E_ω und A wie in B_1 definiert.

B_4. Es ist H eine zweidimensionale Sphäre und A ist so definiert [10]): Für alle $x_1, x_2, \ldots$ gilt: $U[x_1]$; $A[x_1, x_2] \sim$ entweder $x_1 = x_2$ oder x_1, x_2 sind Endpunkte des gleichen Kugeldurchmessers $(x_1 \neq x_2)$; $A[x_1, x_2, x_3] \sim x_1, x_2, x_3$ liegen auf dem gleichen Großkreise; $A[x_1, x_2, \ldots, x_p]$, $p \geqq 4$.

B_5. Es ist H die Gaußsche komplexe Zahlenebene einschließlich des uneigentlichen Punktes P_α; ferner ist A so definiert: $A[x_1] \sim x_1 = P_\alpha$; $A[x_1, x_2] \sim$ entweder $x_1 = x_2$ oder $x_1 = P_\alpha$ oder $x_2 = P_\alpha$; $A[x_1, x_2, x_3] \sim x_1, x_2, x_3$ liegen auf einer Geraden (wobei auch $x_1 = P_\alpha$ usw. sein darf); $A[x_1, \ldots, x_p]$, falls $p \geqq 4$.

B_6. Es ist H der euklidische E_2 oder projektive P_2 und A so erklärt: $U[x_1]$; $A[x_1, x_2] \sim x_1 = x_2$; ferner gelte $A[x_1, x_2, x_3] \sim x_1 = x_2$ oder $x_2 = x_3$ oder $x_3 = x_1$; $A[x_1, \ldots, x_4] \sim x_1, \ldots, x_4$ liegen auf einer Geraden oder zwei Punkte fallen zusammen; $A[x_1, \ldots, x_5] \sim$ vier von den x_ν liegen auf einer Geraden oder zwei Punkte fallen zusammen. $A[x_1, \ldots, x_6] \sim x_1, \ldots, x_6$ liegen auf dem gleichen Kegelschnitt; $A[x_1, \ldots, x_p]$ für $p \geqq 7$.

B_7. Es ist H der euklidische E_3 und A so erklärt: $U[x_1]$; $A[x_1, x_2] \sim x_1 = x_2$; $A[x_1, x_2, x_3] \sim x_1 = x_2$ oder $x_2 = x_3$ oder $x_3 = x_1$; $A[x_1, \ldots, x_4] \sim x_1, \ldots, x_4$ liegen auf dem gleichen Kreise oder der gleichen Geraden; $A[x_1, \ldots, x_5] \sim x_1, \ldots, x_5$ liegen auf der gleichen Kugel oder Ebene; $A[x_1, \ldots, x_p]$ für $p \geqq 6$.

B_8. Es ist H eine beliebige Punktmenge und A so erklärt: $U[x_1]$; $A[x_1, \ldots, x_p] \sim$ zwei Punkte fallen zusammen $(p \geqq 2)$.

B_9. Algebraische Abhängigkeit [11]). Es sei K ein Körper im Sinne der Algebra und N eine Erweiterung von K. Nimmt man N als Raum H, so kann in diesem eine Abhängigkeit so erklärt werden: Endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus N heißen abhängig, wenn ein nicht identisch verschwindendes Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$ über K existiert mit $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

(Wir bemerken dazu noch: Ist $P(x_1, \ldots, x_n)$ z. B. in x_1 von positivem Grade, so heißt speziell a_1 *algebraisch* abhängig über K von $a_2, \ldots, a_n$. Die Elemente $x < N$ mit $A[x]$ sind genau die über K algebraischen. Die Axiome (K) und (I) sind sicher erfüllt. Zum Beweise, daß auch (A) gilt, beachten wir: O. B. d. A. können (die in (A) auftretenden) y und z als transzendent über K angenommen werden. Dann ist die linke Seite der Gleichung $P'(x_1, \ldots, x_p, y) = 0$ bzw. $P''(x_1, \ldots, x_p, z) = 0$, welche hier der Beziehung $A(x_1, \ldots, x_p, y)$ bzw. $A(x_1, \ldots, x_p, z)$ entspricht, in y bzw. z sowie in mindestens einem der $x_1, \ldots, x_p$, etwa in $x_1', \ldots, x_s'$ bzw. in $x_1'', \ldots, x_q''$ von positivem Grade $(1 \leqq s \leqq p$, $1 \leqq q \leqq p)$. Ist x_1 sowohl unter den $x_1', \ldots, x_s'$ als unter den $x_1'', \ldots, x_q''$ enthalten, so ist z. B. x_1 algebraisch abhängig von $x_2, \ldots, x_p, y$ und folglich [12]) auch z von $x_2, \ldots, x_p, y$, d. h. $A(x_2, \ldots, x_p, y, z)$. Ist aber x_1 z. B. nicht unter den $x_1', \ldots, x_s'$ enthalten, so ist y algebraisch abhängig von $x_2, \ldots, x_p$, also erst recht von $x_2, \ldots, x_p, z$, d. h. $A(x_2, \ldots, x_p, y, z)$, w. z. z. w.).

1. 5. *Mannigfaltigkeit. Basis. Äquivalenz.* Zum Aufbau einer Abhängigkeitstheorie, die einen abstrakten Kern der Geometrie der gewöhnlichen linearen Abhängigkeit darstellt, erweist sich die Einführung der folgenden, in gewissem Sinne anschaulichen, Begriffe als erforderlich. Es sei $U[x_1, \ldots, x_q]$. Wir bezeichnen $q \geqq 1$ als Länge

[10]) Das nachstehend gebrauchte Zeichen $\sim$ soll die logische Äquivalenz bezeichnen.

[11]) Vgl. Haupt, Einführung in die Algebra **2** (Leipzig 1929), Kap. 23. 6; B. L. van der Waerden, Moderne Algebra **1** (1. Aufl. Berlin 1930), § 61 und 62. Bei van der Waerden a. a. O., S. 204 ist die algebraische Abhängigkeit auch axiomatisch verallgemeinert; die dort angegebenen Axiome sind aber etwas anders als die unsrigen.

[12]) Vgl. Haupt, a. a. O. [11]), S. 589, Satz 2.

von $S = [x_1, \ldots, x_q]$. Ferner bezeichne $L[x_1, \ldots, x_q] = L(S)$ die Menge aller $y \varepsilon H$ mit $A[x_1, \ldots, x_q, y]$. Es soll $L[x_1, \ldots, x_q]$ die durch die *unabhängigen* Punkte $x_1, \ldots, x_q$ oder die durch $S = [x_1, \ldots, x_q]$ *aufgespannte A-Mannigfaltigkeit* (*in* H), auch $[H; A]$-Mannigfaltigkeit oder einfach Mannigfaltigkeit heißen. Irgendein unabhängiges System $[y_1, \ldots, y_t]$, dessen Punkte $y_1, \ldots, y_t$ sämtlich zu $L(S) = L[x_1, \ldots, x_q]$ gehören, heißt eine Basis, genauer A-Basis, von $L(S)$, wenn $L[y_1, \ldots, y_t] = L(S)$; insbesondere ist also $[x_1, \ldots, x_q]$ eine solche Basis (wir werden sehen (Nr. **2.** 2, **III**), daß stets $t = q$ sein muß). Zwei Systeme S_1 und S_2 unabhängiger Punkte heißen äquivalent, genauer A-äquivalent, in *Zeichen* $S_1 \approx S_2$, wenn $L(S_1) = L(S_2)$; die Beziehung $\approx$ ist eine Gleichheit (d. h. determiniert, reflexiv, symmetrisch und transitiv). Eine Teilmenge T von H ist A-Mannigfaltigkeit, wenn ein $S = [z_1, \ldots, z_r]$ mit $U[z_1, \ldots, z_r]$ und mit $z_\varrho \varepsilon T$, $\varrho = 1, \ldots, r$, existiert, so daß $T = L(S)$.

Ist S^0 das (nach Nr. **1.** 2 als unabhängig betrachtete) leere System, so bezeichnen wir als die von S^0 aufgespannte Mannigfaltigkeit $L(S^0)$ die Menge L^0 aller Punkte y mit $A[y]$, die wir singuläre Punkte nennen, im Gegensatz zu den gewöhnlichen Punkten x mit $U[x]$. Das System S^0 nennen wir die (einzige) Basis von L^0; diese Basis hat die Länge Null.

In jeder A-Mannigfaltigkeit ist jeder singuläre Punkt und somit L^0 enthalten. Kein unabhängiges Punktsystem enthält singuläre Punkte.

Beispiele für Mannigfaltigkeiten und ihre Basen sind leicht aus $B_1, \ldots, B_9$ (Nr. **1.** 4) zu entnehmen. In B_5 gilt $A[P_\alpha]$ und $L^0 = \{P_\alpha\}$. In B_9 ist L^0 die größte in N enthaltene algebraische Erweiterung K^0 von K.

§ 2. Basiseigenschaften. Folgerungen.

2. 1. Aus (K), (I) und (A) (Nr. **1.** 2) folgen für $U[x_1, \ldots, x_q]$

(2. 1. 1) $\quad L[x_1, \ldots, x_r] < L[x_1, \ldots, x_q]$ für $1 \leqq r \leqq q$.

(2. 1. 2) $\quad$ In $L[x_1, \ldots, x_q]$ sind $x_1, \ldots, x_q$ enthalten.

(2. 1. 3) $\quad L[x_1, \ldots, x_r, y'] = L[x_1, \ldots, x_r, y'']$, falls

$U[x_1, \ldots, x_r, y']$, $\quad U[x_1, \ldots, x_r, y'']$, $\quad A[x_1, \ldots, x_r, y', y'']$, $\quad r = 0, 1, \ldots$

Beweis. 1) Wegen (I) gilt:

(2. 1. 1. 1) *Ein System ist sicher abhängig bzw. unabhängig, wenn es ein abhängiges System enthält bzw. in einem unabhängigen enthalten ist.* In Formeln: $A[y_1, \ldots, y_s] \to A[y_1, \ldots, y_p]$ und $U[z_1, \ldots, z_p] \to U[z_1, \ldots, z_s]$ für $s \leqq p$.

Also $A[x_1, \ldots, x_r, z] \to A[x_1, \ldots, x_q, z]$, woraus (2. 1. 1.) folgt.

2) Aus (2. 1. 1. 1.) und (I) für $s = 2$ ergibt sich ($p \geqq 2$):

(2. 1. 2. 1) Sind in einem System zwei Punkte gleich, so ist S abhängig. *Die Punkte eines unabhängigen Systems sind alle verschieden.*

Also z. B. $A[x_1, x_1, x_2, \ldots, x_q]$, woraus (2. 1. 2.) folgt.

3) Wegen (A) gilt:

Wenn $U[x_1, \ldots, x_r, y']$, $A[x_1, \ldots, x_r, y', y'']$ und $A[x_1, \ldots, x_r, y', z]$, dann $A[x_1, \ldots, x_r, y'', z]$; wenn $U[x_1, \ldots, x_r, y'']$, $A[x_1, \ldots, x_r, y'', y']$ und $A[x_1, \ldots, x_r, y'', z]$, dann $A[x_1, \ldots, x_r, y', z]$; $r = 0, 1, \ldots$. Daraus folgt:

(2. 1. 3. 1) Wenn $U[x_1, \ldots, x_r, y']$, $U[x_1, \ldots, x_r, y'']$ und $A[x_1, \ldots, x_r, y', y'']$, dann $A[x_1, \ldots, x_r, y', z] \sim A[x_1, \ldots, x_r, y'', z]$; daraus folgt (2. 1. 3).

Zusatz. Wegen (2. 1. 2. 1) sind *die Punkte einer Basis stets verschieden.*

2. 2. Es gelten nun folgende Sätze.

I. *Voraussetzung. Es sei T eine A-Mannigfaltigkeit mit einer Basis der Länge* $q \geqq 0$.

1. Behauptung. Irgend q unabhängige, zu T gehörige Punkte bilden stets eine Basis von T.

2. Behauptung. Irgend $(q+1)$ zu T gehörige Punkte sind stets abhängig.

Beweis. Für $q = 0$ ist $T = L^0$ und ist das leere System S^0 die einzige Basis sowie das einzige in L^0 enthaltene unabhängige System. Es sei jetzt $q \geqq 1$; dann gilt:

a) Beh. 2 folgt aus Beh. 1. In der Tat: Es mögen $z_1, \ldots, z_{q+1}$ zu $T = L[x_1, \ldots, x_q]$ gehören. Ist $A[z_1, \ldots, z_q]$, dann $A[z_1, \ldots, z_{q+1}]$ wegen (I). Ist aber $U[z_1, \ldots, z_q]$, so ist $L[z_1, \ldots, z_q] = T$ (zufolge Beh. 1), also wegen $z_{q+1} \varepsilon T$ und zufolge der Definition Nr. **1.** 5 auch $A[z_1, \ldots, z_{q+1}]$.

b) Beweis von Beh. 1: Vollständige Induktion [13]). Für $q = 1$ ist Beh. 1 richtig wegen (2. 1. 3.) für $r = 0$. Es sei Beh. 1 und damit (wegen a)) auch Beh. 2 richtig für $q = 1, \ldots, n-1$. Zu zeigen ist, daß aus $U[x_1, \ldots, x_n]$, $U[y_1, \ldots, y_n]$ und $A[x_1, \ldots, x_n, y_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt: $L[x_1, \ldots, x_n] = L[y_1, \ldots, y_n]$. *Erstens*: Wir betrachten $T = L[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ (vgl. (2. 1. 1.)). Wegen Beh. 2 können in T nicht alle $y_1, \ldots, y_n$ enthalten sein, z. B. nicht y_n. Dann ist also $U[x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n]$. Weil daneben $U[x_1, \ldots, x_n]$ und $A[x_1, \ldots, x_n, y_n]$, so folgt aus (2. 1. 3.), daß $L[x_1, \ldots, x_n] = L[x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n]$, womit schon ein x_ν durch ein y_ν ersetzt ist. — *Zweitens*: Wir wiederholen die gleichen Schlüsse, indem wir $L[x_1, \ldots, x_{n-2}, y_n]$ an Stelle von $L[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ treten lassen. Bei geeigneter Numerierung der $y_1, \ldots, y_{n-1}$ erhalten wir

$$L[x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n] = L[x_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-1}, y_n],$$

also $L[x_1, \ldots, x_n] = L[x_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-1}, y_n]$. — Durch Fortsetzung dieser Schlüsse lassen sich alle x_ν durch die y_ν ersetzen, w. z. z. w.

II. *Alle Basen einer A-Mannigfaltigkeit T besitzen gleiche Länge. Äquivalente Basen haben stets gleiche Länge.* (Folgt unmittelbar aus **I.**)

Die allen Basen S von T gemeinsame Länge heiße Rang von T und von S, genauer A-Rang, in *Zeichen*: Rang (T) = Rang (S) = Länge von S.

Der Rang von T ist die maximale Anzahl unabhängiger Punkte aus T und die minimale Anzahl von gewöhnlichen [14]) *Punkten aus T, von welchen alle übrigen zu T gehörigen Punkte abhängen.*

III. *Sind $X = [x_1, \ldots, x_q]$ und $Y = [y_1, \ldots, y_q]$ irgendwelche unabhängige Systeme gleicher Länge $q > 1$, so gibt es für die $y_1, \ldots, y_q$ stets eine Anordnung $y'_1, \ldots, y'_q$ derart, daß $[x_1, \ldots, x_\varrho, y'_{\varrho+1}, \ldots, y'_q]$ unabhängig ist für alle $\varrho = 1, \ldots, q-1$.*

Folgt wie beim Beweise von **I**, Beh. 1.

Sind insbesondere X und Y äquivalente Basen (der gleichen A-Mannigfaltigkeit T), *so ist daher auch $[x_1, \ldots, x_\varrho, y'_{\varrho+1}, \ldots, y'_q]$ eine zu X und Y äquivalente Basis.*

Zusatz. In diesem Zusammenhange erwähnen wir: Sind zwei unabhängige Systeme $S_1 = [x_1, \ldots, x_n]$, $S_2 = [y'_1, \ldots, y'_n]$ gleichen Ranges n gegeben, so kann man die y'_ν so umnumerieren: $S_2 = [y_1, \ldots, y_n]$, daß y_ν nicht in $L[x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n]$ liegt $(\nu = 1, \ldots, n)$, d. h. (unter Benützung einer später (Nr. **6.** 1.) eingeführten Ausdrucksweise) daß y_ν nicht in der der Ecke x_ν gegenüberliegenden Seitenmannigfaltigkeit des durch S_1 definierten Simplexes liegt. — Der (rein kombinatorisch zu führende) Beweis mag hier unterdrückt werden.

---

[13]) Bezüglich dieser Schlüsse vgl. z. B. van der Waerden, a. a. O. [11]), S. 207.

[14]) Vgl. Nr. **1.** 5.

IV. Ergänzungssatz. *Ist* $T = L[x_1, \ldots, x_q]$, *wo* $2 \leqq q$, *so kann jedes System von* r *zu* T *gehörigen unabhängigen Punkten* $[y_1, \ldots, y_r]$, $1 \leqq r \leqq q-1$, *zu einer Basis von* T *ergänzt werden und zwar durch Hinzunahme von* $q-r$ *geeignet gewählten der* $x_1, \ldots, x_q$.

Wird $[y_1, \ldots, y_r]$ etwa durch $x_{r+1}, \ldots, x_q$ zu einer Basis ergänzt, so heiße $[x_{r+1}, \ldots, x_q]$ komplementär zu $[y_1, \ldots, y_r]$ in T.

Beweis. Es sind wegen **I** und $U[x_1, \ldots, x_q]$ nicht alle $x_1, \ldots, x_q$ in $L[y_1, \ldots, y_r]$ enthalten, also etwa $U[y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}]$. Ist $r+1 < q$, so führt Wiederholung des Schlusses zur Behauptung.

V. Transitives Gesetz. *Sind* $y_1, \ldots, y_r$ *unabhängige Punkte der A-Mannigfaltigkeit* $T = L[x_1, \ldots, x_q]$, *so ist* $L[y_1, \ldots, y_r]$ *in* T *enthalten. Für* $q = r$ *und nur dann ist* $L[y_1, \ldots, y_r] = T$.

Beweis. Zufolge **IV** kann $T = L[y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_q]$ angenommen werden. Wegen (2. 1. 1.) und **I** folgt die Behauptung.

VI. Äquivalenzsatz. *Ersetzt man in einem unabhängigen System*

$$S = [a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_q]$$

ein Teilsystem $T = [b_1, \ldots, b_q]$ *durch ein äquivalentes* $T' = [b_1', \ldots, b_q']$, $q \geqq 1$, *so ergibt sich ein zu* S *äquivalentes unabhängiges System* $S' = [a_1, \ldots, a_r, b_1', \ldots, b_q']$.

Beweis. Wegen der Transitivität von $\approx$ und wegen **III** kann angenommen werden, daß $b_1 = b_1', \ldots, b_{q-1} = b_{q-1}'$. Nun sind $b_1, \ldots, b_{q-1}, b_q'$ zufolge (2. 1. 2.) und **V** in $L(S)$ enthalten, weil $L(T) = L[b_1, \ldots, b_q] = L[b_1, \ldots, b_q'] = L(T')$. Wegen **I.** 1 ist daher nur noch $U[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_q']$ zu beweisen. Wäre das nicht der Fall, so müßte wegen $U[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_{q-1}]$ (vgl. (2. 1. 1. 1)) gewiß b_q' und damit (vgl. **V**) $L(T')$ in $R = L[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_{q-1}]$ enthalten sein. Wegen $L(T) = L(T')$ wäre also auch $L[b_1, \ldots, b_q]$ und folglich (vgl. **V**) S in R enthalten, im Widerspruch zu $U[a_1, \ldots, b_q]$.

Zusatz. Ist das unabhängige System S Summe der (unabhängigen) Systeme $S_1, \ldots, S_n$, so ergibt sich bei Ersetzung von S_ν durch ein äquivalentes S_ν', $\nu = 1, \ldots, n$, ein zu S äquivalentes System, also: $S_1 + \cdots + S_n \approx S_1' + \cdots + S_n'$, falls $S_\nu \approx S_\nu'$, $\nu = 1, \ldots, n$.

VII. *Ist* $S = [a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_q, c_1, \ldots, c_s]$ *mit* $r > 0$ *unabhängig, so ist*

$$L(A) = L[a_1, \ldots, a_r]$$

gleich dem Durchschnitt $L(B) \cdot L(C)$ *von* $L(B) = L[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_q]$ *und von* $L(C) = L[a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s]$ [15]).

Beweis. Wegen (2. 1. 1.) ist $L(A) < L(B) \cdot L(C)$. Wir zeigen indirekt, daß auch $L(A) > L(B) \cdot L(C)$. Andernfalls nämlich gäbe es einen sowohl in $L(B)$, als in $L(C)$, aber nicht in $L(A)$ enthaltenen Punkt x. Es wäre also $U[a_1, \ldots, a_r, x]$; daneben wäre x und damit (vgl. **V**) $L[a_1, \ldots, a_r, x]$ in $L[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_q]$ enthalten. Nach dem Ergänzungssatze (**IV**) würde daher für $q > 1$ sein:

$$[a_1, \ldots, a_r, x, b_2, \ldots, b_q] \approx [a_1, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_q]$$

bei passender Numerierung der b_ϱ; für $q = 1$ wäre $[a_1, \ldots, a_r, x] \approx [a_1, \ldots, a_r, b_1]$. Zufolge **VI** ist somit $[a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_q, c_1, \ldots, c_s] \approx [a_1, \ldots, a_r, x, b_2, \ldots, b_q, c_1, \ldots, c_s]$, so daß (vgl. 2. 1. 1. 1.) insbesondere $U[a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s, x]$. Nun wäre andererseits x auch in $L[a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s]$ enthalten, so daß $A[a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s, x]$. Widerspruch.

---

[15]) Wegen (2. 1. 1. 1.) sind $[a_1, \ldots, a_r]$, $[b_1, \ldots, b_q]$, $[c_1, \ldots, c_s]$ je unabhängig.

VIII. Durchschnittsatz. *Der (mengentheoretische) Durchschnitt D beliebig vieler A-Mannigfaltigkeiten $A, B, \ldots$ ist selbst eine A-Mannigfaltigkeit, deren Rang gleich dem Maximum der Längen der gleichzeitig in allen $A, B, \ldots$ enthaltenen unabhängigen Systeme ist.* Also:

Der Durchschnitt von A-Mannigfaltigkeiten ist die größte, in allen enthaltene A-Mannigfaltigkeit.

Beweis. Nach Definition ist $D < A$. Daher ist die Länge l eines *jeden* Systems unabhängiger Punkte aus D nicht größer als Rang (A). Es sei m die maximale unter diesen Längen l, ferner $S = [d_1, \ldots, d_m]$ mit $U[d_1, \ldots, d_m]$ und $d_\mu \varepsilon D$, $\mu = 1, \ldots, m$. Dann ist aber *jeder* $(m+1)$-*te* Punkt aus D abhängig von S, also $D < L(S)$. Andererseits sind alle d_μ, weil in D, in *allen* $A, B, \ldots$ enthalten; weil alle $A, B, \ldots$ A-Mannigfaltigkeiten sein sollen, muß auch $L(S)$ in allen $A, B, \ldots$ enthalten sein, d. h. $L(S) < D \rightarrow L(S) = D$.

§ 3. Ergänzungen.

3. 1. *Mannigfaltigkeiten mod L^0.* Sind zwei Mengen B und C des Raumes $[H; A]$ gleich bis auf Punkte aus L^0, d. h. ist $B - L^0 = C - L^0$, so bezeichnen wir B und C als gleich modulo L^0, in Zeichen: $B = C \bmod L^0$. Ist eine Menge M gleich mod L^0 einer A-Mannigfaltigkeit L, so nennen wir M eine A-Mannigfaltigkeit mod L^0.

3. 2. *Konjugierte Punkte.* Als konjugiert zu einem (gewöhnlichen oder singulären) Punkte a bezeichnen wir jeden Punkt x, für welchen $A[a, x]$ gilt. Ist a singulär, so ist *jeder* Punkt zu a konjugiert. Ist a gewöhnlich, so sind unter seinen konjugierten jedenfalls alle singulären enthalten; die etwa noch vorhandenen gewöhnlichen konjugierten Punkte heißen eigentlich *konjugiert* zum *gewöhnlichen* Punkte a.

Beispiele. In B_4 bzw. B_5 (Nr. **1.** 4) gibt es zu jedem Punkt einen, von ihm verschiedenen konjugierten, nämlich den diametral gelegenen bzw. den singulären P_x. In dem dem Beispiele B_9 entsprechenden $[H; A]$-Raume gibt es zu jedem gewöhnlichen Punkte x unendlich viele eigentlich-konjugierte; denn von jedem über K transzendenten Elemente x hängen alle Elemente von $K(x)$ algebraisch ab, und es gibt unendlich viele derartige (nicht über K algebraische, also) nicht zu K^0 bzw. zu L^0 gehörige Elemente [16]) bzw. Punkte. Hingegen besitzt in $B_1, B_2, B_3, B_6, B_7, B_8$ jeder Punkt nur sich selbst als konjugierten; diese $[H; A]$ genügen dem eine Verschärfung von (K) darstellenden

Axiom (K*): $\qquad A[x_1, x_2] \sim x_1 = x_2$

und enthalten demgemäß auch keine singulären Punkte. Die Beziehung des eigentlichen Konjugiertseins ist eine Gleichheit; denn aus $U[a_1]$, $U[a_2]$, $U[a_3]$ und $A[a_1, a_2]$, $A[a_2, a_3]$ folgt $A[a_1, a_3]$ bzw. $L[a_1] = L[a_2] = L[a_3]$ bzw. $[a_1] \approx [a_2] \approx [a_3]$ wegen Axiom (A).

Ersetzt man in einem unabhängigen System irgendwelche seiner Punkte durch eigentlich konjugierte, so ergibt sich ein äquivalentes System (vgl. Nr. **2.** 2, **VI**).

Durch Identifizierung der eigentlich konjugierten Punkte und Weglassung aller singulären erhält man bei im übrigen unverändertem A bzw. U aus jedem $[H; A]$ einen $[H^*; A]$, welcher (K*) genügt und als reduziert bezeichnet wird. Die Theorie der $[H; A]$ wird also bei Ersetzung von (K) durch (K*) dahin geändert, daß alle auf singuläre und konjugierte Punkte sich beziehenden Aussagen wegfallen. Umgekehrt erhält man alle nicht-reduzierten $[H; A]$-Räume, indem man in jedem reduzierten jeden gewöhnlichen Punkt x ersetzt durch eine beliebige Menge von Punkten, die man als gewöhnliche und zueinander konjugierte erklärt, und ferner eine beliebige Punktmenge

[16]) Vgl. dazu auch Haupt, a. a. O. [11]), S. 251, Ziff. 8.

hinzufügt, die als Menge L^0 erklärt wird; selbstverständlich unter gleichzeitiger entsprechender Erweiterung (vgl. Nr. **3.** 3) der Abhängigkeitsdefinition.

Beispiel. Aus B_4 erhält man als reduziert einen zur (zweidimensionalen) projektiven Ebene (vgl. B_2) abhängigkeitsisomorphen (vgl. Nr. **3.** 4) Bereich $[H; A]$.

Zusatz. In diesem Zusammenhange sei folgendes Erweiterungsproblem erwähnt: Auf der Menge aller nichtgeordneten Systeme von n Punkten aus H sei eine Beziehung A_n erklärt, welche der in (2. 1. 2. 1.) enthaltenen Forderung genügt; dabei sei $n > 1$ eine *fest vorgegebene* natürliche Zahl. Gefragt wird nach der Möglichkeit, A_n zu erweitern zu einer Beziehung A für *alle* nichtgeordneten Systeme (aus H) beliebiger Länge, so daß A den Axiomen (K), (I) und (A) genügt. Zufolge Nr. **1.** 3 genügt es, A_n auf alle Systeme der Länge $1 \leqq p < n$ zu erweitern. Setzt man $A[x_1, \ldots, x_p] \sim A_n[x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n]$ für *beliebige* $x_{p+1}, \ldots, x_n$, so genügt die so erklärte Erweiterung von A den Axiomen (K) und (I); die Frage, ob notwendig dann auch (A) erfüllt sei, ist offen; vgl. dazu die Definition der Beispiele B_6 und B_7 (Nr. **1.** 4). In Verallgemeinerung von B_6 kann man fragen, ob folgendes Prädikat A_n erweiterungsfähig im vorstehend dargelegten Sinne ist: Es sei H die Menge der Punkte des P_2, ferner $n = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, wo $k \geqq 2$ ganz, und $A[x_1, \ldots, x_n]$ gleichbedeutend damit, daß $x_1, \ldots, x_n$ auf einer algebraischen Kurve des Grades k liegen. (Für B_6 ist $k = 2$ und dann, wie gezeigt, die Erweiterung möglich).

3. 3. *Relativbegriffe. Abhängigkeitstreue Erweiterung.* In irgendeiner vorgelegten Teilmenge E von H (d. h. für die Elemente von E) ist wegen der Erblichkeit der Axiome (K), (I) und (A) (Nr. **1.** 2) ebenfalls eine diesen Axiomen genügende Abhängigkeit erklärt, welche in E mit der in H erklärten übereinstimmt. Es gibt also E Anlaß zu dem in $[H; A]$ enthaltenen $[E; A]$. Umgekehrt kann man $[H; A]$ als eine Erweiterung von $[E; A]$ auffassen, bei welcher die in E erklärte Abhängigkeit ungeändert bleibt: Abhängigkeitstreue Erweiterung von $[E; A]$. — Die A-Mannigfaltigkeiten aus $[E; A]$ bezeichnen wir als solche in E oder relativ E, auch als $[E; A]$-Mannigfaltigkeiten, kürzer als E-Mannigfaltigkeiten; in *Zeichen*: L_E. Sind die in $[H; A]$ unabhängigen Punkte e_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, in E enthalten, so sind sie auch in E unabhängig und umgekehrt. $L[e_1, \ldots, e_n] = L_H[e_1, \ldots, e_n]$ bzw. $L_E[e_1, \ldots, e_n]$ ist die von den e_ν in H oder $[H; A]$ bzw. in E oder $[E; A]$ aufgespannte A-Mannigfaltigkeit.

Es ist $L_E[e_1, \ldots, e_n]$ *der (mengentheoretische) Durchschnitt von* E *mit* $L_H[e_1, \ldots, e_n]$, also: $L_E[e_1, \ldots, e_n] = E \cdot L_H[e_1, \ldots, e_n]$; *insbesondere ist* $L_E^0 = E \cdot L^0$, wo L_E^0 bzw. L^0 *die Menge der singulären Punkte von* $[E; A]$ bzw. $[H; A]$. Entsprechend ist eine $[E; A]$-Mannigfaltigkeit mod $E \cdot L^0$ darstellbar als Durchschnitt von E mit einer $[H; A]$-Mannigfaltigkeit mod L^0.

Als A-absolute *Aussagen* (Begriffe) bezeichnen wir solche auf Elemente eines $[E; A]$ bezügliche Aussagen (Begriffe), welche gegenüber abhängigkeitstreuer Erweiterung von $[E; A]$ unempfindlich sind. *Beispiel*: Rang (S). Nicht A-absolute Aussagen (Begriffe) heißen A-relativ, genauer z. B. $[E; A]$-*Aussagen*. *Beispiel*: Die durch S (in E) aufgespannte A-Mannigfaltigkeit.

3. 4. *Isomorphie.* Wir erklären $[H; A]$ und $[H'; A']$ als abhängigkeitsisomorph, wenn H und H' umkehrbar eindeutig so aufeinander abbildbar sind, daß, falls x'_ν das Bild von x_ν ist, $\nu = 1, \ldots, n$, aus $A[x_1, \ldots, x_p]$ folgt $A'[x'_1, \ldots, x'_p]$ und umgekehrt. *Abhängigkeitsisomorphe* $[H; A]$ *werden von uns i. a. als nicht wesentlich verschieden betrachtet.*

3. 5. *Systeme unendlichen Ranges.* Schließlich bemerken wir, daß (mindestens) ein Teil unserer nachfolgenden Betrachtungen sich auch auf (wohlgeordnete) Systeme S von beliebig (also evtl. auch unendlich) vielen Punkten bzw. auf A-Mannigfaltigkeiten

beliebigen Ranges ausdehnen läßt. Dabei bezeichnen [17]) wir einen Punkt x als abhängig von S, wenn x zusammen mit einem *endlichen* Teilsystem aus S ein abhängiges System bildet, ferner bezeichnen wir als A-Mannigfaltigkeit jedes System (Punktmenge aus H), das jeden von ihm abhängigen Punkt enthält. Jedes System S ist dann enthalten in einer über S kleinsten A-Mannigfaltigkeit $L(S)$. Und S heißt *unabhängig* (auch irreduzibel), wenn es kein *echtes* Teilsystem S' von S gibt mit $L(S) = L(S')$. Für den Fall der Systeme aus *endlich* vielen Punkten stimmt diese Erklärung der Unabhängigkeit mit der ursprünglich (Nr. **1.** 2) gegebenen überein. Mit diesen Definitionen gilt auch für Systeme S von beliebiger Mächtigkeit z. B. der Satz (vgl. Nr. **2.** 2; **II**), daß S ein unabhängiges Teilsystem S^* enthält mit $L(S) = L(S^*)$ und daß alle derartigen S^* gleiche Mächtigkeit besitzen [18]). Da aber diese Ausdehnung unserer Ergebnisse auf Mengen unendlichen Ranges für unsere späteren Zwecke nicht erforderlich ist, werden wir sie nicht weiter verfolgen.

§ 4. Rang beliebiger Mengen. Summen- und Durchschnittssätze.

4. 1. *Rang und A-Hülle einer Menge.* Es sei T irgendeine *nicht leere* Teilmenge von H. Wir bezeichnen T als von endlichem (A)-Range, wenn die Längen der in T enthaltenen unabhängigen Systeme beschränkt sind, und als Rang von T, in *Zeichen*: Rang (T), das Maximum dieser Längen. Dieser Rangbegriff ist *absolut*. Für A-Mannigfaltigkeiten T stimmt (daher) die eben gegebene Rangdefinition mit der früher gegebenen überein (vgl. Nr. **2.** 2, **II**). Die leere Menge erklären wir als vom *Range* 0. Ist $T = H$ von endlichem Range usw., so heißt auch $[H; A]$ von endlichem Range.

Bei Hinzufügung bzw. Wegnahme singulärer Punkte zu bzw. von T bleibt Rang (T) *ungeändert*; *ferner*

Jede Menge vom Range Null ist Teil von L^0.

Ist T vom Range 1, *so enthält T außer singulären Punkten nur untereinander eigentlich konjugierte Punkte.*

Es gelten folgende Sätze:

I. *Rang* (T) *ist eine monotone Funktion von T*, d. h. aus $T_1 < T_2$ folgt Rang (T_1) $\leqq$ Rang (T_2), falls Rang (T_2) endlich ist.

II. *Es sei* $T < E$. *Es ist Rang* (T), *wenn endlich, gleich dem Range der* kleinsten *T enthaltenden, mit* $L_E(T)$ bezeichneten *A-Mannigfaltigkeit in E* (d. h. des Durchschnittes aller T enthaltenden $[E; A]$-Mannigfaltigkeiten). *Wir nennen* $L_E(T)$ *auch die* A-Hülle von T in E. (Dieser Begriff ist *A-relativ*.)

Beweis folgt aus Nr. **2.** 2, **IV** und **VIII**.

III. $L_E(T)$ *ist eine monotone Funktion von T*, d. h. $L_E(T_1) < L_E(T_2)$, falls $T_1 < T_2 < E$.

4. 2. *Basis. Äquivalenz.* Jede Basis $[t_1, \ldots, t_q]$ von $L_E(T)$, wo $T < E$, heiße eine Basis von T *in* E und insbesondere eine innere Basis, falls alle t_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, q$, zu T gehören. Aus der Definition von Rang (T) folgt:

Jede Menge T von endlichem Range besitzt (*mindestens*) *eine innere Basis. Jedes ganz in T gelegene unabhängige System* (insbesondere also jedes aus einem gewöhnlichen Punkt bestehende) *kann zu einer inneren Basis von T erweitert werden* (vgl. Nr. **2.** 2, **IV**).

Kennzeichnend dafür, daß T eine A-Mannigfaltigkeit in E sei, ist $T = L_E(T)$.

T' und T'' *heißen* (in Verallgemeinerung von Nr. **1.** 5) (A-)äquivalent, in *Zeichen*: $T' \approx T''$, falls $L(T') = L(T'')$; insbesondere ist also $T \approx L(T) \approx \{t_1, \ldots, t_q\}$, falls $[t_1, \ldots, t_q]$ Basis von T. *Äquivalente Mengen besitzen gleichen Rang.*

---

[17]) Vgl. Haupt, a. a. O. [11]), S. 588ff.

[18]) Vgl. Haupt, a. a. O. [11]), S. 592—594.

Notwendig und hinreichend für $T' \approx T''$ ist, daß T' und T'' eine gemeinsame (nicht notwendig innere) Basis besitzen.

Unser Äquivalenzbegriff ist *A-absolut.* Ist nämlich $T' \approx T''$ in $[H; A]$, mithin $L_H(T') = L_H(T'')$, so auch $L_E(T') = E \cdot L_H(T') = E \cdot L_H(T'') = L_E(T'')$ (falls T' und T'' in E enthalten sind); umgekehrt: Ist $L_E(T') = L_E(T'')$, so besitzen T' und T'' eine gemeinsame Basis (in E, also erst recht) in H, so daß $L_H(T') = L_H(T'')$). Wir können und werden daher auftretende *Äquivalenzen meist auf $[H; A]$ bezogen denken.*

Aus $T_1 < T_2$ und Rang (T_1) = Rang (T_2) folgt, daß $T_1 \approx T_2$, also $T_2 < L(T_1)$. Ist dabei T_1 speziell eine A-Mannigfaltigkeit, so gilt sogar $T_1 = T_2$.

Beweis. Eine innere Basis $[b_1, \ldots, b_q]$ von T_1 ist auch eine solche von T_2, daher $L(T_1) = L(T_2)$ und $T_2 < L(T_1)$. Daher ist $T_1 \leqq T_2$, falls $L(T_1) = T_1$.

Insbesondere folgt also aus $T < Q < L(T)$, daß $Q \approx T$; denn Rang $(T) \leqq$ Rang $(Q) \leqq$ Rang $(L(T))$ und Rang (T) = Rang $(L(T))$. Hinreichend für $T' \approx T''$ ist ferner, daß T' und T'' sich nur um singuläre Punkte unterscheiden ($T' + T'' - T' \cdot T'' < L^0$).

4. 3. *Anwendungen.* Wir zeigen:

I. *Voraussetzung. Es sei Rang $(T) \geqq n > 0$. Ferner existiere in H ein gewöhnlicher Punkt x_0, welcher in allen A-Mannigfaltigkeiten vom Range n enthalten ist, die eine in T enthaltene Basis besitzen.*

Behauptung. Es ist x_0 in $L(T)$ enthalten und n = Rang (T).

Beweis. Ist $U[x_1, \ldots, x_n]$, $x_\nu \varepsilon T$, $\nu = 1, \ldots, n$, so kann x_0 wegen $x_0 \varepsilon L^* = L[x_1, \ldots, x_n]$ durch Hinzunehmen von $n - 1$ geeigneten der x_ν zu einer Basis von L^* ergänzt werden (Nr. **2.** 2, **IV**), etwa durch $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Für jeden beliebigen Punkt $x \varepsilon T$ ist nun $A[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x]$, weil andernfalls $U[x_1, \ldots, x_{n-1}, x]$ und x_0 nicht in $L[x_1, \ldots, x_{n-1}, x]$ enthalten wäre, entgegen der Voraussetzung. Daher ist $T < L[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0]$, also Rang $(T) \leqq n$ und $L(T) = L^*$.

II. *Sind $x_1, \ldots, x_m$ beliebige Punkte aus H, so gilt Rang $(\{x_1, \ldots, x_m\}) \leqq m$, wobei das Gleichheitszeichen kennzeichnend ist für $U[x_1, \ldots, x_m]$.*

Beweis. Vollständige Induktion.

4. 4. *Summen- und Durchschnittsätze.* Wir behaupten:

I. *Die Summe endlich vieler Mengen T_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, je von endlichem Range ist selbst von endlichen Range, und dieser Rang ist nicht größer als die Summe der Ränge der Summanden.*

Es gilt also die I. Rangungleichung

$$\text{(R I)} \qquad \text{Rang}\,(T_1 + \cdots + T_n) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \text{Rang}\,(T_\nu).$$

Beweis. Ist $L(T_\nu) = L(B_\nu)$, $B_\nu = [x_1^{(\nu)}, \ldots, x_{r_\nu}^{(\nu)}]$, r_ν = Rang (T_ν), setzt man ferner $T^* = B_1 + \cdots + B_n$, so ist T^* von endlichem Range mit Rang $(T^*) \leqq r_1 + \cdots + r_n$. Ferner gilt $L(T_\nu) < L(T^*)$ und folglich $T_1 + \cdots + T_n < L(T_1) + \cdots + L(T_n) < L(T^*)$. Wegen Rang $(L(T^*))$ = Rang (T^*) folgt jetzt die Behauptung.

Ia. Anwendung. *Sind die Mengen T_ν, S_ν je von endlichem Range und ist $T_\nu \approx S_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, so gilt: $T = T_1 + \cdots + T_n \approx S = S_1 + \cdots + S_n$.*

Beweis. T und S sind (zufolge **I**) von endlichem Range, so daß $L(T)$ und $L(S)$ erklärt sind. Wegen $T_\nu < L(T_\nu) < L(T)$ und $S_\nu < L(S_\nu) < L(S)$ sowie wegen $L(T_\nu) = L(S_\nu)$ gilt $S < L(T)$ und $T < L(S)$, also auch $L(S) < L(T) < L(S)$, woraus $L(T) = L(S)$ und damit die Behauptung folgt.

II. *Für Summe und Durchschnitt irgend zweier Mengen T_1, T_2 von endlichem Range gilt die* II. Rangungleichung

(R II) Rang (T_1) + Rang $(T_2) \geqq$ Rang $(T_1 \cdot T_2)$ + Rang $(T_1 + T_2)$.

Beweis. a) Es genügt, (R II) für A-Mannigfaltigkeiten zu beweisen. Da nämlich $T_j < L(T_j) = L_j$ ist, $j = 1, 2$, so ist $T_1 + T_2 < L_1 + L_2$, $T_1 \cdot T_2 < L_1 \cdot L_2$, also Rang $(T_1 + T_2) \leqq$ Rang $(L_1 + L_2)$, Rang $(T_1 \cdot T_2) \leqq$ Rang $(L_1 \cdot L_2)$. Außerdem ist Rang $(T_j) =$ Rang (L_j), $j = 1, 2$. Gilt also (R II) für die L_j, so erst recht für die T_j.

b) Es sei $L = L_1 \cdot L_2 = L[d_1, \ldots, d_q]$, $L_j = L[d_1, \ldots, d_q, x_{q+1}^{(j)}, \ldots, x_{r_j}^{(j)}]$, Rang $(L_1 \cdot L_2) = q$ (vgl. Nr. **2.** 2, **IV**), Rang $(L_j) = r_j$, $j = 1, 2$. Zufolge **Ia** ist

$$L_1 + L_2 \approx \{d_1, \ldots, d_q, x_{q+1}^{(1)}, \ldots, x_{r_1}^{(1)}\} + \{d_1, \ldots, d_q, x_{q+1}^{(2)}, \ldots, x_{r_2}^{(2)}\}$$
$$= \{d_1, \ldots, d_q, x_{q+1}^{(1)}, \ldots, x_{r_1}^{(1)}, x_{q+1}^{(2)}, \ldots, x_{r_2}^{(2)}\} = S;$$

daher Rang $(L_1 + L_2) =$ Rang $(S) \leqq r_1 + r_2 - q$ (wegen Nr. **4.** 3, **II**).

IIa. *Es seien* $[x_1, \ldots x_p]$ *und* $[y_1, \ldots, y_q]$ *irgendwelche* (*abhängige oder unabhängige*) *Systeme aus* H. *Existiert dann ein* gewöhnlicher *Punkt* z *aus* H *mit* $A[x_1, \ldots, x_p, z]$ *und* $A[y_1, \ldots, y_q, z]$, *so gilt auch* $A[x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q]$.

Beweis. Da für $A[x_1, \ldots, x_p]$ oder $A[y_1, \ldots, y_q]$ nichts zu beweisen ist, sei $U[x_1, \ldots, x_p]$ und $U[y_1, \ldots, y_q]$ angenommen. Setzt man $X = L[x_1, \ldots, x_p]$, $Y = L[y_1, \ldots, y_q]$, so gilt $z < X \cdot Y$, also wegen $U[z]$ jedenfalls Rang $(X \cdot Y) \geqq 1$. Aus **II** folgt daher: Rang (X) + Rang $(Y) = p + q >$ Rang $(X + Y)$. Nun ist $X + Y \approx \{x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q\} = M$ (zufolge **Ia**), also Rang $(M) < p + q$, woraus die Behauptung folgt.

IIb. *Es seien* $S_1, \ldots, S_p$ *Teilsysteme des unabhängigen Systems* S. *Dann ist* $L(S_1) \cdot \ldots \cdot L(S_p) = L(S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_p)$.

Beweis. Es genügt, $p = 2$ zu erledigen, weil vollständige Induktion möglich ist. Ist $S_1 \cdot S_2$ nicht leer, so folgt die Behauptung aus Nr. **2.** 2, **VII**. Ist aber $S_1 \cdot S_2 = S^0$, so gilt (wegen **Ia** und) weil $S_1 + S_2$ ein unabhängiges System ist:

$$\text{Rang } (L(S_1) + L(S_2)) = \text{Rang } (S_1 + S_2) = \text{Rang } (S_1) + \text{Rang } (S_2)$$
$$= \text{Rang } (L(S_1)) + \text{Rang } (L(S_2)).$$

Zufolge **II** ist also Rang $(L(S_1) \cdot L(S_2)) = 0$, woraus $L(S_1) \cdot L(S_2) = L^0 = L(S^0)$ folgt.

§ 5. Direkte Zerlegungen.

5. 1. *Voneinander unabhängige Mengen.* Es seien E_j, $j = 1, \ldots, n$; $n > 1$, Teilmengen aus H je von *endlichem Range*. Wir bezeichnen dann die E_j als unabhängig voneinander, wenn

$$\text{Rang } (E_1 + \cdots + E_n) = \text{Rang } (E_1) + \cdots + \text{Rang } (E_n).$$

Dieser Begriff ist ein *A-absoluter*.

Anmerkung. Wir sagen „unabhängig *voneinander*“: *Erstens*, weil die hier gemeinte Unabhängigkeit von Mengen sich nicht auf eine einzelne Menge bezieht, sondern nur auf *mehrere* (d. h. mindestens zwei) Mengen. *Zweitens*, weil eine Unterscheidung gegenüber dem Begriff der Unabhängigkeit von Punktsystemen erforderlich ist. In der Tat können Punktsysteme „voneinander unabhängig“ sein, während zugleich jedes einzelne der Systeme nicht unabhängig ist; da nämlich der Fall Rang $(E_\nu) = 0$ für (einige oder) alle E_ν zugelassen ist, so haben z. B. irgendwelche in L^0 enthaltene (einpunktige) Systeme $[e_\nu]$ als „unabhängig voneinander“ zu gelten, während zugleich die Systeme $[e_\nu]$ selbst nicht unabhängig sind (vgl. auch Ziff. **II** unten).

Aus der Definition folgt:

I. Sind $E_1, \ldots, E_n$ unabhängig voneinander und die $E_{n+1}, \ldots, E_k$ je vom Range Null, so sind auch die $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}, \ldots, E_k$ unabhängig voneinander. Insbesondere

sind E' und E'' unabhängig voneinander, sobald Rang $(E') = 0$ ist bei beliebigem E'' von endlichem Range.

II. Sind die e_j gewöhnliche Punkte, so ist $U[e_1, \ldots, e_n]$ gleichbedeutend mit der Unabhängigkeit der $\{e_j\}$ voneinander.

III. *Die Unabhängigkeit der E_j, $j = 1, \ldots, n$, voneinander ist gleichbedeutend mit der Unabhängigkeit von zu den E_j äquivalenten E_j' voneinander*, insbesondere also mit der Unabhängigkeit von Mengen B_j voneinander, wo B_j eine Basis von E_j bezeichnet. Sind die E_j, $j = 1, \ldots, n$, unabhängig voneinander, so sind es auch die $L_{II}(E_j)$.

Folgt aus Nr. **4.** 4, **Ia.**

IV. *Der Durchschnitt voneinander unabhängiger Mengen (speziell A-Mannigfaltigkeiten) ist in der Menge L^0 der singulären Punkte enthalten (speziell gleich L^0).*

Beweis. Es genügt, den Durchschnitt nur zweier Mengen E_1, E_2 zu betrachten. Zufolge Nr. **4.** 4, **II** ist aber Rang $(E_1 \cdot E_2) = 0$, also $E_1 \cdot E_2 < L^0$ (vgl. Nr. **4.** 1). Sind E_1 und E_2 speziell Mannigfaltigkeiten, so ist L^0 in beiden enthalten, also gleich $E_1 \cdot E_2$ (vgl. Nr. **3.** 1).

Zusatz. Mit E_1 und E_2 sind voneinander unabhängig auch $E_1 - E_2$ und E_2 sowie E_1 und $E_2 - E_1$ (wobei die Differenzen $E_1 - E_2$ usw. im mengentheoretischen Sinne zu verstehen sind). Denn $E_1 \approx E_1 - E_2$ wegen $E_1 \cdot E_2 < L^0$.

Bemerkung. Umgekehrt sind mod L^0 fremde A-Mannigfaltigkeiten in E *nicht* notwendig unabhängig voneinander. (Beispiel: Es sei $[H; A]$ der euklidische R_3 und E die Summe zweier fremder, nicht komplanarer, paralleler Kreisscheiben.) Falls in einem $[H; A]$ irgend zwei mod L^0 fremde A-Mannigfaltigkeiten auch unabhängig voneinander sind, möge $[H; A]$ als A-vollständig bezeichnet werden. Die A-vollständigen Räume sind also dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen für beliebige A-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 gilt:

(R) Rang $(M_1 + M_2) =$ Rang $(M_1) +$ Rang (M_2) gleichbedeutend mit Rang $(M_1 \cdot M_2) = 0$.

Unter den A-vollständigen Räumen sind insbesondere enthalten die etwa als A-projektive zu bezeichnenden und dadurch gekennzeichneten, daß für beliebige A-Mannigfaltigkeiten T_1, T_2 gilt:

$$\text{(R*)} \quad \text{Rang}\,(T_1) + \text{Rang}\,(T_2) = \text{Rang}\,(T_1 + T_2) + \text{Rang}\,(T_1 \cdot T_2).$$

Es erhebt sich die Frage, ob bzw. unter welchen zusätzlichen Bedingungen ein $[H; A]$ zu einem A-vollständigen oder zu einem A-projektiven abhängigkeitstreu *erweitert* werden kann; ferner die Frage, ob (R) und (R*) logisch gleichwertig sind. Die Verfolgung dieser Fragen soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Wir bemerken aber schon hier, daß jeder A-vollständige Raum auch A-projektiv ist und umgekehrt.

5. 2. *Kennzeichnung der Unabhängigkeit.* Eine solche ist enthalten im folgenden

Satz. *Ist B_j eine Basis von E_j, $j = 1, \ldots, n$, so sind die E_j dann und nur dann voneinander unabhängig, wenn (die $B_1, \ldots, B_n$ paarweise fremd*[18a]*) sind und wenn) $B = B_1 + \cdots + B_n$ ein unabhängiges System ist. Alsdann ist B eine Basis von $E_1 + \cdots + E_n$.*

Beweis. Wegen $E_j \approx B_j$ ist die Unabhängigkeit der E_j voneinander gleichbedeutend mit der der B_j (Nr. **5.** 1, **III**). Ferner ist Rang $(B) = \sum_j$ Rang (B_j) dann und nur dann, falls (die B_j paarweise fremd[18a]) sind und falls) B unabhängig ist (vgl. auch Nr. **4.** 3, **II**) Schließlich ist $B \approx E_1 + \cdots + E_n$ (Nr. **4.** 4, **Ia**).

[18a]) Die Fremdheit zweier B_ν (bzw. S_ν) ist in dem Sinne zu verstehen, daß sie nur das leere System gemeinsam haben; einige der B_ν (bzw S_ν) können mit dem leeren System identisch sein.

Folgerungen:

I. *Ist E_j' bzw. S_j eine Teilmenge von E_j (die auch den Rang Null besitzen darf) bzw. ein in E_j, $j = 1, \ldots, n$, enthaltenes unabhängiges System, so folgt aus der Unabhängigkeit der E_j voneinander die der E_j' bzw. die (paarweise Fremdheit*[18a]*) der $S_1, \ldots, S_n$ und die) Unabhängigkeit von $S_1 + \cdots + S_n$.*

Beispiele. 1. $E_j' = E_j \cdot M$, wo M beliebige Teilmenge von H. 2. Ist speziell $E_j' = \{e_j\}$, wo e_j ein gewöhnlicher Punkt von E_j, $j = 1, \ldots, n$, so ist $[e_1, \ldots, e_n]$ unabhängig, falls die E_j unabhängig voneinander sind (vgl. Nr. **5.** 1, **II**).

Beweis. Die Behauptung bezüglich der E_j' folgt nach dem letzten Satze aus der bezüglich der S_j. Zum Beweis der letzteren ergänzt man S_j zu einer Basis B_j von E_j (Nr. **2.** 2, **IV**). Nach obigem Satze sind dann die B_j paarweise fremd und $B_1 + \cdots + B_n$ ist unabhängig; daher gilt das Gleiche für die S_j (Nr. **2.** 1. 1. 1).

II. *Mit $E_1, \ldots, E_n$ sind unabhängig voneinander auch $E_{j_1}, \ldots, E_{j_r}$,* wobei $1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqq n$, $1 < r < n$. (Folgt aus **I.**)

III. *Ist $E = E_1 + \cdots + E_n$ mit voneinander unabhängigen E_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, so gehört jeder gewöhnliche Punkt von E zu genau einem E_ν.*

Beweis. Mit $E_1, \ldots, E_n$ sind z. B. E_1 und E_2 voneinander unabhängig. Daher $E_1 \cdot E_2 < L^0$ (Nr. **5.** 1, **IV**).

IV. *Ist $E = E_1 + \cdots + E_n$ mit voneinander unabhängigen E_ν, so ist E_ν eine E-Mannigfaltigkeit mod L^0, d. h. $L_E(E_\nu) - E_\nu$ enthält höchstens singuläre Punkte ($\nu = 1, \ldots, n$).*

Beweis. Zufolge Nr. **5.** 1, **III** sind auch die $L_\nu = L_E(E_\nu)$ voneinander unabhängig. Gäbe es nun z. B. einen in $L_1 - E_1$ enthaltenen *gewöhnlichen* Punkt x_1, so wäre x_1, wegen $x_1 \varepsilon E$ in genau einem E_ν enthalten (Nr. **5.** 2, **III**), wobei $\nu \neq 1$, etwa $\nu = 2$. Somit wäre erst recht $x_1 \varepsilon L_2$, und da auch $x_1 \varepsilon L_1$, so wäre $x_1 \varepsilon L_1 \cdot L_2 < L^0$ (Nr. **5.** 1, **IV**). Widerspruch.

V. *Es seien $E_{\tau_1}, \ldots, E_{\tau_{q(\tau)}}$ mit $1 \leqq q(\tau)$, $\tau = 1, \ldots, t$, irgendwelche $q(1) + \cdots + q(t)$ sämtlich untereinander verschiedene Mengen aus der Reihe der voneinander unabhängigen Mengen $E_1, \ldots, E_n$. Dann sind die $F_\tau = E_{\tau_1} + \cdots + E_{\tau_{q(\tau)}}$, $\tau = 1, \ldots, t$, ebenfalls voneinander unabhängig.*

Beweis. Die $E_{\tau_1}, \ldots, E_{\tau_{q(\tau)}}$ sind voneinander unabhängig (Nr. **5.** 2, **II**). Ist B_{τ_σ} eine Basis von E_{τ_σ}, $\sigma = 1, \ldots, q(\tau)$, so sind die B_{τ_σ} paarweise fremd[18a]) und es ist $B_\tau = B_{\tau_1} + \cdots + B_{\tau_{q(\tau)}}$ eine Basis von F_τ, $\tau = 1, \ldots, t$ (Nr. **5.** 2, Satz). Ferner ist $S = (B_{1_1} + \cdots + B_{1_{q(1)}}) + (B_{2_1} + \cdots B_{2_{q(2)}}) + \cdots + (B_{t_1} + \cdots + B_{t_{q(t)}})$ unabhängig bzw. leer (Nr. **5.** 2, **I**). Folglich (Nr. **5.** 2, Satz) sind die F_τ voneinander unabhängig.

VI. *Die Mengen $E_1, \ldots, E_n$ seien voneinander unabhängig; ferner sei B eine* innere *Basis von $E = E_1 + \cdots + E_n$. Dann enthält jedes E_ν genau so viele Punkte von B, wie der Rang von E_ν beträgt, $\nu = 1, \ldots, n$.* M. a. W.: *Der Durchschnitt von B mit E_ν liefert eine Basis von E_ν.*

Beweis. Es sei $r_\nu = \text{Rang}\,(E_\nu)$, also $\text{Rang}\,(E) = r_1 + \cdots + r_n =$ Länge von B. Ferner sei q_ν die Länge des in E_ν enthaltenen Teilsystems B_ν von B, mithin $0 \leqq q_\nu \leqq r_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Da B nur gewöhnliche Punkte enthält (Nr. **1.** 5), soweit B nicht leer ist, so liegt jeder Punkt von B in genau einem E_ν (Nr. **5.** 2, **III**). Daher ist $B = B_1 + \cdots + B_n$, also $q_1 + \cdots + q_n = r_1 + \cdots + r_n$, woraus wegen $0 \leqq q_\nu \leqq r_\nu$ die Behauptung folgt.

5. 3. *Direkte Summe. Direkte Zerlegung.* Wir bemerken im voraus: Zwei Darstellungen (Zerlegungen) $E = E_1 + \cdots + E_n$ und $E = F_1 + \cdots + F_q$ von E heißen gleich (bzw. gleich mod L^0), wenn $n = q$ und $E_\nu = F_\nu$ (bzw. $E_\nu = F_\nu$ (mod L^0)), $\nu = 1, \ldots, n$, bei geeigneter Reihenfolge der F_ν ist; andernfalls heißen die Darstellungen verschieden.

Die Summe $E_1 + \cdots + E_n$ heiße A-direkt, kürzer direkt, wenn die Mengen $E_1, \ldots, E_n$ voneinander unabhängig sind. Haben die Summanden $E_1, \ldots, E_n$ der direkten Summe $E = E_1 + \cdots + E_n$ sämtlich *positive Ränge und ist* $n \geqq 2$, so heißt die direkte Summendarstellung $E = E_1 + \cdots + E_n$ eine (A-)direkte Zerlegung von E. Dabei heißt n die Länge der Zerlegung. Diese Begriffe sind A-absolut.

I. *Ist* $E = E_1 + \cdots + E_n$ *eine Darstellung von* E *als direkte Summe, so gilt:*

1. *Die* E_ν *sind paarweise fremd mod* L^0;
2. *Jedes* E_ν *ist eine* E*-Mannigfaltigkeit mod* L^0;
3. *Ist* E *eine* H*-Mannigfaltigkeit mod* L^0, *so auch jedes* E_ν.

Beweis. 1. folgt aus Nr. **5.** 1, **IV.** — 2. folgt aus Nr. **5.** 2, **IV.** — 3. ergibt sich aus 2. und der Definition der H- bzw. E-Mannigfaltigkeit (Nr. **1.** 5; Nr. **3.** 1; Nr. **3.** 3). Es ist nämlich $E_\nu = E \cdot L_H(E_\nu)$, also, falls $E = L_H(E)$, sogar

$$E_\nu = L_H(E_\nu) \cdot L_H(E) = L_H(E_\nu).$$

II. *Ist* $E_1 + \cdots + E_n$ *eine direkte Summe, so auch* $L_H(E_1) + \cdots + L_H(E_n)$.

Folgt aus Nr. **5.** 1, **III.**

III. *Ist* $E_1 + \cdots + E_n$ *eine direkte Summe, so auch* $E_{j_1} + \cdots + E_{j_r}$, wobei $1 \leqq j_1 < \cdots < j_r \leqq n, 1 < r < n$.

Folgt aus Nr. **5.** 2, **II.**

IV. *Ist* $E_1 + \cdots + E_n$ *eine direkte Summe bzw. Zerlegung, so auch* $F_1 + \cdots + F_m$, *wobei* $F_i = E_{n_i+1} + \cdots + E_{n_{i+1}}$ *mit* $0 = n_1 < n_2 < \cdots < n_m < n_{m+1} = n$ *ist.*

Folgt aus Nr. **5.** 2, **V.**

V. *Ist* $F = F_1 + \cdots + F_m$ *eine direkte Summe und* $F_i = E_{n_i+1} + \cdots + E_{n_{i+1}}$ *eine direkte Summe für jedes* $i = 1, \ldots, n$, *wobei* $0 = n_1 < n_2 < \cdots < n_m < n_{m+1} = n$ *ist, so ist auch* $E = E_1 + \cdots + E_n$ *eine direkte Summe.*

Beweis. Wird $r_\nu = \text{Rang } (E_\nu)$ und $s_i = \text{Rang } (F_i)$ gesetzt, so gilt:

$$\text{Rang } (E) = \text{Rang } (F) = s_1 + \cdots + s_m$$
$$= (r_1 + \cdots + r_{n_2}) + (r_{n_2+1} + \cdots + r_{n_3}) + \cdots + (r_{n_m+1} + \cdots + r_n) = r_1 + \cdots + r_n.$$

VI. *Voraussetzung. Es sei* $E_1 + \cdots + E_n$ *eine direkte Summe und* G *eine Teilmenge von* $E = E_1 + \cdots + E_n$.

Behauptung. 1. *Es ist* $G \cdot E_1 + \cdots + G \cdot E_n$ *eine direkte Summe.*

2. *Falls Rang* $(E) =$ *Rang* (G), *also* $E \approx G$, *so ist sogar* $G \cdot E_\nu \approx E_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$.

Beweis. 1. Nach Nr. **5.** 2, **I** sind die Mengen $G_\nu = G \cdot E_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) unabhängig voneinander. — 2. Nach 1. ist $\text{Rang } (G_1) + \cdots + \text{Rang } (G_n) = \text{Rang } (G)$. Aus $\text{Rang } (G) = \text{Rang } (E)$ folgt also

$$\text{Rang } (G_1) + \cdots + \text{Rang } (G_n) = \text{Rang } (E_1) + \cdots + \text{Rang } (E_n).$$

Wegen $\text{Rang } (G_\nu) \leqq \text{Rang } (E_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots, n$ (Nr. **4.** 1, **I**) ist also

$$\text{Rang } (G_\nu) = \text{Rang } (E_\nu) \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

VII. *Sind* $E_1 + \cdots + E_n$ *und* $F_1 + \cdots + F_k$ *direkte Summen, ist ferner* $E_1 + \cdots + E_n = F_1 + \cdots + F_k$, *so ist auch* $\sum_{\substack{\nu=1,\ldots,n \\ \varkappa=1,\ldots,k}} E_\nu \cdot F_\varkappa$ *eine direkte Summe.*

Folgt aus Nr. **5.** 3, **V** und Nr. **5.** 3, **VI.**

VIII. *Ist $E = E_1 + \cdots + E_n$ eine direkte Zerlegung der Menge E und ist $r = Rang\ (E)$, so enthält jede E-Mannigfaltigkeit F mod L^0 von einem Rang q mit $q > r - n \geqq 0$ mindestens $q + n - r$ der Mengen $E_1 - L^0, \ldots, E_n - L^0$.*

Beweis. Da nach Voraussetzung jede Menge $E_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ einen positiven Rang r_ν besitzt und da $r = r_1 + \cdots + r_n$ ist, so gilt $n \leqq r$. Wegen $F - L^0 < E$ ist $q \leqq r$ (Nr. **4.** 1, **I**). Es sei $S_F = [f_1, \ldots, f_q]$ eine innere Basis von F und $S_E = [f_1, \ldots, f_q, e_{q+1}, \ldots, e_r]$ eine innere Basis von E (vgl. Nr. **2.** 2, **IV**). Zufolge Nr. **5.** 2, **VI** hat dann E_ν genau eine Basis S_ν von E_ν mit S_E gemeinsam, so daß $r_\nu = \text{Rang}\ (E_\nu) = \text{Rang}\ (S_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Setzt man $q_\nu = \text{Rang}\ (S_F \cdot S_\nu)$, so gilt $q = q_1 + \cdots + q_n$ (Nr. **5.** 3, **VI**), da $S_F < S_1 + \cdots + S_n$ ist. Wegen $r = r_1 + \cdots + r_n$ folgt also $r - q = (r_1 - q_1) + \cdots + (r_n - q_n)$. Wegen $r - q < n$ sind daher sicher $n - (r - q)$ der $(r_\nu - q_\nu)$ gleich Null, etwa für $\nu = 1, \ldots, n - (r - q)$. Wegen $S_F \cdot S_\nu < S_\nu$ folgt aus $r_\nu - q_\nu = 0$, daß $S_F \cdot S_\nu = S_\nu$, also $S_\nu < S_F$ und mithin

$$E_\nu - L^0 < L_E(E_\nu) = L_E(S_\nu) < L_E(S_F) = F,$$

da F eine E-Mannigfaltigkeit ist, $\nu = 1, \ldots, n - (r - q)$.

IX. *Voraussetzung. Es sei $E = E_1 + \cdots + E_n$ eine direkte Zerlegung von E, ferner T_ν eine (nicht leere) Teilmenge von $E_\nu - L^0$, $\nu = 1, \ldots, n$.*

Behauptung. $L_E(T_1 + \cdots + T_n) = L_E(T_1) + \cdots + L_E(T_n)$. *Und dies ist ebenfalls eine direkte Zerlegung.*

Beweis. Indem wir zu inneren Basen der T_ν übergehen, können wir o. B. d. A. annehmen, daß $T_\nu = S_\nu = [x_\nu^1, \ldots, x_\nu^{s_\nu}]$ ein unabhängiges Punktsystem ist, $\nu = 1, \ldots, n$. Sicher ist $L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_n) < L_E(S_1 + \cdots + S_n)$. Wäre nicht auch $L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_n) > L_E(S_1 + \cdots + S_n)$, so existierte ein nicht in $L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_n)$ enthaltener Punkt x von $L_E(S_1 + \cdots + S_n)$, also mit

$$\text{Rang}\ (\{x, x_1^1, \ldots, x_1^{s_1}, \ldots, x_n^1, \ldots, x_n^{s_n}\}) \leqq s_1 + \cdots + s_n.$$

Da andererseits x in einem E_ν, etwa in E_1, jedoch nicht in $L_E(S_1)$ liegt, so ist $\text{Rang}\ (\{x, x_1^1, \ldots, x_1^{s_1}\}) = s_1 + 1$ und (gemäß **VI**)

$$\begin{aligned} &\text{Rang}\ (\{x, x_1^1, \ldots, x_1^{s_1}, \ldots, x_n^1, \ldots, x_n^{s_n}\}) \\ &= \text{Rang}\ (\{x, x_1^1, \ldots, x_n^{s_1}\}) + \text{Rang}\ (\{x_2^1, \ldots, x_2^{s_2}\}) + \cdots + \text{Rang}\ (\{x_n^1, \ldots, x_n^{s_n}\}) \\ &= 1 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n. \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

X. Kennzeichnung der direkten Summen. *Eine Darstellung $E = E_1 + \cdots + E_n$ ist dann und nur dann direkte Summe, wenn die Unabhängigkeit eines Systems $S = [x_1, \ldots, x_k]$ von Punkten aus E gleichwertig ist mit der Unabhängigkeit eines jeden nicht leeren unter den Durchschnitten $S_\nu = S \cdot E_\nu$ von S mit E_ν, $\nu = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Es seien die beiden in der Behauptung erwähnten Aussagen gleichwertig. Wählen wir dann als S_ν eine Basis von E_ν, so muß also $S = S_1 + \cdots + S_n$ unabhängig sein, woraus nach Nr. **5.** 2, Satz die Behauptung folgt. — Liegt umgekehrt eine direkte Summe vor, so folgt die Behauptung wieder aus Nr. **5.** 2, Satz.

XI. Direkte Zusammensetzung von Abhängigkeitsräumen. Ist $H = H_1 + \cdots + H_n$ eine Darstellung des A-Raumes $[H; A]$ als direkte Summe, so läßt sich $[H; A]$ auffassen als eine gemeinsame abhängigkeitstreue Erweiterung der $[H_\nu; A_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, n$; dabei bezeichnet A_ν die durch A in H_ν induzierte Abhängigkeit, und die Menge aller singulären Punkte von H ist Summe der Mengen der singulären Punkte aller $[H_\nu; A_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, n$. Sind daher umgekehrt zunächst nur die $[H_\nu; A_\nu]$

gegeben derart, daß die Durchschnitte beliebiger der H_ν lediglich singuläre Punkte der H_ν enthalten, so kann man eine gemeinsame abhängigkeitstreue Erweiterung $[H; A]$ der $[H_\nu; A_\nu]$ sozusagen durch direkte Zusammensetzung erhalten, nämlich folgendermaßen: Man setze $H = H_1 + \cdots + H_n$ und erkläre als singuläre Punkte von H alle und nur die Punkte, welche singuläre Punkte (mindestens) eines H_ν sind. Schließlich erkläre man ein (beliebiges) System S von Punkten aus H als unabhängig, wenn (und nur wenn) der Durchschnitt von S mit H_ν ein unabhängiges System liefert für alle $\nu = 1, \ldots, n$, für welche $S \cdot H_\nu$ nicht leer ist. Die Rechtfertigung dieser Definition ergibt sich ohne weiteres aus der vorstehenden Kennzeichnung der direkten Summen (Nr. **5.** 3, **X**).

5. 4. *Direkte Unzerlegbarkeit. Feinste direkte Zerlegung.* Wir bezeichnen eine Menge E endlichen Ranges als (A-)direkt zerlegbar bzw. (A-)direkt unzerlegbar, wenn E mindestens eine bzw. keine direkte Zerlegung gestattet.

Jede Menge vom Range Null oder Eins ist direkt unzerlegbar.

Weiter gilt:

I. *Mit E ist direkt unzerlegbar auch jede Obermenge gleichen Ranges.*

Folgt aus Nr. **5.** 3, **VI.**

II. *Ist die direkt unzerlegbare Menge E von positivem Range und ist E dargestellt als direkte Summe $E_1 + \cdots + E_n$ mit $n \geqq 2$, so haben genau $n - 1$ der Mengen E_ν, etwa $E_2, \ldots, E_n$, den Rang Null; und dann ist $E_1 = E \bmod L^0$.*

Beweis. Von den Mengen E_ν kann höchstens eine einen positiven Rang haben; denn hätten etwa $E_1, \ldots, E_m$, wo $1 < m \leqq n$, positive Ränge, die restlichen (falls vorhanden) den Rang Null, so wäre $E = E_1 + \cdots + E_{m-1} + (E_m + \cdots + E_n)$ nach Nr. **5.** 3, **IV** eine direkte Summe mit Summanden positiven Ranges, also E direkt zerlegbar, im Gegensatz zur Voraussetzung. Wegen

$$\text{Rang}\,(E_1) + \cdots + \text{Rang}\,(E_n) = \text{Rang}\,(E) > 0$$

muß andererseits mindestens ein E_ν einen positiven Rang haben. Wir dürfen also $\text{Rang}\,(E_1) = \text{Rang}\,(E) > 0$, $\text{Rang}\,(E_2) = \cdots = \text{Rang}\,(E_n) = 0$ annehmen. Hieraus folgt aber $E_2 + \cdots + E_n < L^0$ und damit wegen $E = E_1 + \cdots + E_n$ schließlich $E_1 = E \bmod L^0$.

III. Nunmehr ergibt sich leicht der

Satz von der feinsten direkten Zerlegung. *Jede direkt zerlegbare Menge E gestattet eine direkte Zerlegung $E = K_1 + \cdots + K_n$ mit direkt unzerlegbaren K_ν ($\nu = 1, \ldots, n$; $n \geqq 2$). Diese K_ν und damit die Zerlegung selbst sind mod L^0 eindeutig bestimmt (bis auf ihre Reihenfolge). Die K_ν sind $[E; A]$-Mannigfaltigkeiten mod L^0 und heißen die A-Komponenten von E. Die direkte Zerlegung von E in ihre A-Komponenten ist diejenige größter Länge und zugleich die feinste direkte Zerlegung von E, d. h. jede von ihr (mod L^0) verschiedene direkte Zerlegung von E geht mod L^0 aus ihr hervor durch Zusammenfassung von A-Komponenten.*

Beweis. 1. Daß *mindestens eine* direkte Zerlegung in direkt unzerlegbare existiert, folgt in bekannter Weise: *Die Länge jeder direkten Zerlegung ist höchstens gleich dem Range von E.* Es gibt also direkte Zerlegungen $E = E_1 + \cdots + E_m$ größter Länge m ($2 \leqq m \leqq n$); in einer solchen sind aber notwendig alle E_ν direkt unzerlegbar, weil ein direkt zerlegbares E_ν vermöge Nr. **5.** 3, **V** zu einer längeren direkten Zerlegung Anlaß geben würde. — 2. Wegen Nr. **5.** 3, **VII** kann es keine zwei mod L^0 verschiedene direkte Zerlegungen größter Länge von E geben; zugleich ergibt Nr. **5.** 3, **VII**, daß die Zerlegung in die K_ν die feinste direkte Zerlegung ist.

IV. *Bemerkungen.* 1) Bei direkt *unzerlegbarem* E können (und werden) wir gelegentlich E *selbst als seine einzige A-Komponente* bezeichnen und $E = E$ als (feinste) direkte Zerlegung von E.

2) Ist die Länge der feinsten direkten Zerlegung von E gleich Rang (E), so ist (entweder E selbst direkt unzerlegbar oder es ist) jede A-Komponente vom Range 1 und mod L^0 identisch mit der Menge der zu einem gewöhnlichen Punkte von E konjugierten Punkte von E. Man bezeichnet in diesem Falle E auch als direkt total-zerlegbar.

3) Ist E direkt zerlegbar und ist F eine Teilmenge gleichen Ranges wie E, so ist die Anzahl der A-Komponenten von F nicht kleiner als die von E (vgl. Nr. **5.** 3, **VI**).

4) Man erhält *jede* direkte Zerlegung von E mod L^0 aus der feinsten durch geeignete gruppenweise Vereinigung der *A-Komponenten* (Nr. **5.** 3, **V**). Ferner erhält man aus jeder direkten Zerlegung $E = E_1 + \cdots + E_n$ eine direkte Zerlegung $E = E_1 + E_1^*$, wo $E_1^* = E_2 + \cdots + E_n$; dabei kann insbesondere E_1 eine A-Komponente sein.

5) Ist $E = E_1 + \cdots + E_n$ eine direkte Zerlegung von E, so sind die direkt unzerlegbaren unter den E_ν A-Komponenten von E.

6) Jeder gewöhnliche Punkt z von E gehört zu einer A-Komponente von E, welche mod L^0 eindeutig bestimmt ist (Nr. **5.** 2, **III**). Diese z enthaltende A-Komponente $E(z)$ von E ist mod L^0 *die größte, und folglich ranggrößte, direkt unzerlegbare z enthaltende Teilmenge von* E.

Beweis. O. B. d. A. kann E als direkt zerlegbar angenommen werden. Wir betrachten die feinste direkte Zerlegung $E = E_1 + \cdots + E_n$ von E; wir können o. B. d. A. setzen: $E_1 = E(z)$. Es sei F ein direkt unzerlegbarer, z enthaltender Teil von E. Wegen der direkten Unzerlegbarkeit von F ist also (Nr. **5.** 3, **VI** und **5.** 4, **II**) in $F = F \cdot E_1 + \cdots + F \cdot E_n$ sicher $F = F \cdot E_1$ mod L^0, d. h. $F - L^0 < E_1$, d. h. $F < E_1$ mod L^0.

6a) Ist F Teilmenge von E, so gilt $F(z) < E(z)$ mod L^0.

6b) Hat die Teilmenge T der direkt zerlegbaren Menge E mit zwei A-Komponenten von E je (mindestens) einen gewöhnlichen Punkt gemeinsam, so ist T ebenfalls direkt zerlegbar.

5. 5. *Kennzeichen für direkte Unzerlegbarkeit.*

I. *Es sei T eine Teilmenge mit Rang $(T) = t$ der direkt zerlegbaren Menge E mit Rang $(E) = r > 0$. Es ist T dann und nur dann eine A-Komponente von E, wenn T direkt unzerlegbar ist mit $t > 0$ und wenn $E - T$ höchstens den Rang $r - t$ besitzt.*

Beweis. Die Bedingungen sind *hinreichend.* Sind sie nämlich erfüllt, so gilt wegen Rang $(E) \leqq$ Rang (T) + Rang $(E - T)$ (Nr. **4.** 4, **I**) sogar Rang $(E - T) = r - t$. Da E direkt zerlegbar und $T < E$ direkt unzerlegbar sein soll, so gilt $t < r$, also $r - t > 0$. Mithin ist $E = T + (E - T)$ eine direkte Zerlegung. Zufolge Nr. **5.** 4, **IV**, 5) ist daher T eine A-Komponente von E. — Die Bedingungen sind *notwendig.* Ist nämlich T eine A-Komponente von E (mit $0 < t < r$), so existiert eine direkte Zerlegung $E = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$ mit $K_1 = T$. Es ist also $E = T + (E - T)$ eine direkte Zerlegung (Nr. **5.** 4, **IV**, 4). Daher ist $r = t +$ Rang $(E - T)$, w. z. z. w.

II. *Die Menge E vom Range $r > 0$ ist dann und nur dann direkt unzerlegbar, wenn für jede E-Mannigfaltigkeit L_E mod L^0 mit $1 \leqq$ Rang $(L_E) < r$ gilt:*

$$\textit{Rang}\,(L_E) + \textit{Rang}\,(E - L_E) \geqq r + 1.$$

Beweis. Die Bedingung ist *hinreichend.* Ist nämlich $E = E_1 + \cdots + E_n$ mit $n \geqq 2$ eine direkte Zerlegung, so auch $E = E_1 + (E - E_1)$ mit $1 \leqq$ Rang $E_1 < r$

(Nr. **5.** 4, **IV**, 4). Dabei ist $E_1 = L$ eine E-Mannigfaltigkeit mod L^0 (Nr. **5.** 3, **I**), ferner ist $r = \text{Rang}\ (L) + \text{Rang}\ (E - L) < r + 1$. — Die Bedingung ist *notwendig*. Ist nämlich L eine beliebige Teilmenge von E mit $\text{Rang}\ (L) + \text{Rang}\ (E - L) \leqq r$ und $1 \leqq \text{Rang}\ (L) < r$, so ist wegen $r = \text{Rang}\ (E) \leqq \text{Rang}\ (L) + \text{Rang}\ (E - L)$ sogar $\text{Rang}\ (E) = \text{Rang}\ (L) + \text{Rang}\ (E - L)$. Also ist $E = L + (E - L)$ eine direkte Zerlegung.

III. *Eine direkte Zerlegung $E = E_1 + \cdots + E_n$ ist dann und nur dann die mod L^0 feinste direkte Zerlegung von E, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

Ist S_ν irgendein unabhängiges Punktsystem aus E_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ mit

$$0 < s = \text{Rang}\ (S_1) + \cdots + \text{Rang}\ (S_n) < \text{Rang}\ (E) = r,$$

so gilt:

$$\text{(1)} \qquad \text{Rang}\ (E - L_E(S_1 + \cdots + S_n)) \geqq r - s + 1.$$

Beweis. Die Bedingung ist *hinreichend*. Es sei etwa $E_1 = E_{11} + E_{12}$ eine direkte Zerlegung von E_1. Dann ist $E = E_{11} + E_{12} + E_2 + \cdots + E_n$ bzw. $F = E_{12} + E_2 + \cdots + E_n$ eine direkte Zerlegung von E bzw. von F (Nr. **5.** 3, **V**). Nun sei S_ν eine innere Basis von E_ν für $\nu = 2, \ldots, n$ bzw. von E_{12} für $\nu = 1$. Aus

$$\begin{aligned} r = \text{Rang}\ (E) &= \text{Rang}\ (E_{11}) + \text{Rang}\ (F) \\ &= \text{Rang}\ (E_{11}) + \text{Rang}\ (E_{12}) + \text{Rang}\ (E_2) + \cdots + \text{Rang}\ (E_n) \end{aligned}$$

folgt dann wegen $\text{Rang}\ (S_\nu) = \text{Rang}\ (E_\nu) > 0$, $\nu = 2, \ldots, n$, $\text{Rang}\ (S_1) = \text{Rang}\ (E_{12}) > 0$ und $\text{Rang}\ (E_{11}) > 0$ die Ungleichung

$$0 < \text{Rang}\ (S_1) + \text{Rang}\ (S_2) + \cdots + \text{Rang}\ (S_n) < \text{Rang}\ (E),$$

also $0 < s < r$. Ferner gilt wegen $L_E(S_\nu) = E_\nu \bmod L^0$ für $\nu = 2, \ldots, n$ bzw. $L_E(S_1) = E_{12} \bmod L^0$ (Nr. **5.** 3, **I**) und wegen $L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_n) \subset L_E(S_1 + \cdots + S_n)$, d. h. $E - L_E(S_1 + \cdots + S_n) \subset E - (L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_n)) = E - (E_{12} + E_2 + \cdots + E_n) = E_{11} \bmod L^0$ die Ungleichung:

$$\text{Rang}\ (E - L_E(S_1 + \cdots + S_n)) \leqq \text{Rang}\ (E_{11}) = r - s.$$

Die Bedingung ist *notwendig*. Es existiere nämlich für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ ein unabhängiges Punktsystem S_ν aus E_ν, so daß

$$\text{(U)} \qquad \text{Rang}\ (S_1) + \cdots + \text{Rang}\ (S_n) < r,$$

aber nicht (1) erfüllt ist. Wegen (U) und $0 < s_\nu = \text{Rang}\ (S_\nu) \leqq \text{Rang}\ (E_\nu) = r_\nu$ sowie $r = \text{Rang}\ (E) = \text{Rang}\ (E_1) + \cdots + \text{Rang}\ (E_n) = r_1 + \cdots + r_n$ muß dann für mindestens ein ν gelten $s_\nu < r_\nu$; es sei etwa $s_1 < r_1$. O. B. d. A. können wir $S_2, \ldots, S_n$ als innere Basen von $E_2, \ldots, E_n$ annehmen; ist dies nämlich nicht von vornherein der Fall, so erweitern wir S_ν zu einer inneren Basis von E_ν und bemerken, daß (U) in Geltung bleibt und daß (1) erst recht nicht erfüllt ist, wenn wir S_1 beibehalten und mit S_ν die Erweiterung zur Basis bezeichnen, so daß wir also $E_\nu = L_E(S_\nu) \bmod L^0$ und $s_\nu = r_\nu$ haben für $\nu = 2, \ldots, n$. Aus der Ungültigkeit von (1) wollen wir jetzt folgern, daß $E_1 = L_E(S_1) + (E_1 - L_E(S_1))$ eine direkte Zerlegung ist. Wegen $0 < s_1 < r_1$ ist dazu nur $\text{Rang}\ (E_1) = \text{Rang}\ (S_1) + \text{Rang}\ (E_1 - L_E(S_1))$ zu beweisen, also wegen

$$r = r_1 + s_2 + \cdots + s_n = r_1 + (s - s_1),$$

d. h. $r_1 = s_1 + (r - s)$, nur $\text{Rang}\ (E_1 - L_E(S_1)) = r - s$ zu zeigen. Es ist aber

$$E = (E_1 - L_E(S_1)) + L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_n) = (E_1 - L_E(S_1)) + L_E(S_1 + \cdots + S_n),$$

letzteres wegen Nr. **5.** 3, **IX**, wobei die beiden letzten Summenden fremd sind mod L^0.

Somit ist einerseits (weil (1) als nicht erfüllt angenommen wurde)

$$\text{Rang}\,(E_1 - L_E(S_1)) = \text{Rang}\,(E - L_E(S_1 + \cdots + S_n)) \leqq r - s,$$

andererseits

$$\text{Rang}\,(E) = r \leqq \text{Rang}\,(E_1 - L_E(S_1)) + \text{Rang}\,(S_1) + \text{Rang}\,(S_2) + \cdots + \text{Rang}\,(S_n),$$

also $\text{Rang}\,(E_1 - L_E(S_1)) \geqq r - s$, w. z. z. w.

§ 6. Simplizes. Zerspaltungen.

6. 1. Für unsere späteren Zwecke erweisen sich direkte Zerlegungen einer A-Mannigfaltigkeit als noch nicht ausreichend. Vielmehr ist es erforderlich, auch direkt unzerlegbare Mannigfaltigkeiten noch weiter aufzuspalten. Diese „Zerspaltungen" sind dann *nicht* mehr von der zur Darstellung der Mannigfaltigkeit benutzten Basis *unabhängig*. Zu ihrer Beschreibung erweist sich der Gebrauch von Bezeichnungen aus der kombinatorischen Topologie als zweckmäßig; diese seien zunächst eingeführt. Wir betrachten neben einem unabhängigen Punktsystem $S = [x_1, \ldots, x_n]$ aus $[H; A]$ auch dessen Teilsysteme $T = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$, wobei $1 \leqq k \leqq n$ ist, und nennen S ein $(n-1)$-dimensionales Simplex, jedes T dagegen ein Seitensimplex oder eine $(k-1)$-dimensionale Seite von S. Im Falle $k = 1$ bzw. $1 \leqq k < n$ sprechen wir auch von einer Ecke bzw. von einer echten Seite (einem echten Seitensimplex) von S; ferner kann $[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ als die *der Ecke* x_i gegenüberliegende Seite *von* S bezeichnet werden.

Die A-Mannigfaltigkeit $L(T) = L[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$ heiße eine Seitenmannigfaltigkeit des Simplexes S; im Falle $k < n$ heiße sie echt, ferner werde $L[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ als der Ecke x_i gegenüberliegend bezeichnet. Ist E eine beliebige Menge von $[H; A]$, so werden die E-Mannigfaltigkeiten $L_E[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$ als Seitenmannigfaltigkeiten von S in E bezeichnet.

Ist $[x_1, \ldots, x_n]$ ein Simplex und ist x ein gewöhnlicher Punkt von $L[x_1, \ldots, x_n]$, so ist für ein geeignetes i der Punkt x nicht in der der Ecke x_i gegenüberliegenden Seitenmannigfaltigkeit enthalten (vgl. Nr. **2.** 2, **VII**). Ist der Punkt x aus $L[x_1, \ldots, x_n]$ enthalten in der Seitenmannigfaltigkeit $L[x_1, \ldots, x_m]$ von S, jedoch nicht in der Seitenmannigfaltigkeit $L[x_2, \ldots, x_m]$, so ist $[x_1, x_2, \ldots, x_m] \approx [x, x_2, \ldots, x_m]$ und $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \approx [x, x_2, \ldots, x_n]$ (vgl. Nr. **2.** 2. **I.** 1).

Jede Seitenmannigfaltigkeit $L(T)$ vom Range k ist Durchschnitt derjenigen Seitenmannigfaltigkeiten vom Range $n-1$, welche je einer der $n-k$ nicht in T auftretenden Ecken gegenüberliegen (vgl. Nr. **2.** 2, **VII**).

Das Simplex $S = [x_1, \ldots, x_n]$ heiße ausgezeichnet bezüglich E, wenn E einen bezüglich S allgemeinen Punkt enthält, d. h. einen *gewöhnlichen* Punkt von E, der in $L_E(S)$, aber in keiner echten Seitenmannigfaltigkeit von S enthalten ist. (Falls $E = H$ ist, kann man den Zusatz „bezüglich E" hier und im folgenden auch weglassen.) Ist x ein gewöhnlicher Punkt von E und ist S' eine Seite kleinsten Ranges von S, so daß x in $L_E(S')$ enthalten ist, so ist S' ausgezeichnet bezüglich E. Übrigens ist S' eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß x bezüglich S' allgemein sei; ist nämlich x allgemein bezüglich S' und S'', so liegt x auch in $L(S' \cdot S'')$ (Nr. **4.** 4, **IIb**), liegt also nur dann auf keiner echten Seite von S' oder S'', wenn $S' = S''$. Wir bezeichnen daher S' auch mit S_x und nennen S_x die zu x gehörige *bezüglich* E ausgezeichnete Seite *von* S. Ist nun S^* eine Seite von S mit $x \varepsilon L_E(S^*)$, so muß $S_x < S^*$ sein, da alsdann $x \varepsilon L_E(S_x \cdot S^*)$ (vgl. Nr. **2.** 2, **VII**), also $S_x \cdot S^* = S_x$ gilt. Wir können somit sagen:

Satz. *Jeder gewöhnliche Punkt x von $L_E(S)$ ist allgemein bezüglich einer einzigen Seite S_x von S; dabei ist die zu x gehörige ausgezeichnete Seite S_x gekennzeichnet durch die*

Eigenschaft, in jeder Seite S' von S enthalten zu sein, für welche $x \varepsilon L_E(S')$. Umgekehrt gehört zu jeder bezüglich E ausgezeichneten Seite S^* von S (mindestens) ein bezüglich S^* allgemeiner Punkt y von E, so daß also $S^* = S_y$.

6. 2. *Neue Kennzeichnung der direkten Zerlegungen.*

Voraussetzung. Es sei $S = [x_1, \ldots, x_n]$ eine innere *Basis der Menge E. Es sei $S = S_1 + \cdots + S_k$ Summe der paarweise fremden, echten, nicht leeren Teilsysteme $S_1, \ldots, S_k$ von S.*

Behauptung. Es ist $L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$ eine direkte Zerlegung von E dann und nur dann, wenn jede bezüglich E ausgezeichnete Seite von S in einem der Systeme $S_1, \ldots, S_k$ enthalten ist.

Beweis. Die Bedingung ist *hinreichend.* Wegen der Unabhängigkeit von S genügt zufolge Nr. **5.** 2, Satz der Nachweis, daß $E = L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$ mod L^0. Zunächst ist $L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k) < E$. Ferner ist E in $L(S)$ enthalten, da S eine Basis von E sein soll. Ist nun x ein gewöhnlicher Punkt von E, so muß S_x, weil ausgezeichnet in E, enthalten sein in einem der $S_1, \ldots, S_k$, etwa in S_i. Folglich ist $x \varepsilon L_E(S_i)$ und mithin $E < L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$ mod L^0, woraus $E = L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$ mod L^0 folgt. — Die Bedingung ist *notwendig.* Es sei nämlich S' eine in E ausgezeichnete Seite von S und y ein gewöhnlicher Punkt aus E mit $S' = S_y$ (vgl. Nr. **6.** 1, Satz). Ist $E = L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$, so ist y in einem der Summanden, etwa in $L_E(S_1)$, enthalten, so daß $\{S_y\} < \{S_1\}$ (zufolge Nr. **6.** 1, Satz), w. z. z. w.

6. 3. Ist das Simplex $S = [x_1, \ldots, x_n]$ nicht ausgezeichnet bezüglich der in $L(S)$ enthaltenen Menge E positiven Ranges, so ist E Summe der Seitenmannigfaltigkeiten $L_E(S_i)$ vom Range $n - 1$, wo S_i die x_i gegenüberliegende Seite von S bezeichnet. Ist S_i nicht ausgezeichnet bezüglich E, so ist $L_E(S_i)$ Summe der Seitenmannigfaltigkeiten vom Range $n - 2$ in E von S_i, usw. Setzt man dieses Verfahren fort, bis man zu bezüglich E ausgezeichneten Seiten von S gelangt, so erhält man eine Zerspaltung von E in Bezug auf das Simplex S; wir verstehen darunter eine Darstellung von E als Summe $E = L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$, wobei jedes der $S_1, \ldots, S_k$ bezüglich E maximal ausgezeichnet ist, d. h. eine bezüglich E ausgezeichnete Seite von S, welche nicht echte Seite einer (andern) bezüglich E ausgezeichneten Seite von S ist. Insbesondere ist also kein S_j Seite eines S_i ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, k$). In unserer soeben konstruierten Zerspaltung treten überdies die *sämtlichen* bezüglich E maximal ausgezeichneten Seiten S_j von S bzw. die entsprechenden $L_E(S_j)$ als Summanden auf. Dies muß aber für *jede* Zerspaltung von E bezüglich S der Fall sein. Zu jeder bezüglich E ausgezeichneten Seite S' von S gehört nämlich (mindestens) ein bezüglich S' allgemeiner Punkt x von E; ist $S' = S_x$ maximal ausgezeichnet bezüglich E, so folgt aus $x \varepsilon L_E(S'')$ [wegen Nr. **6.** 1, Satz], daß $\{S_x\} < \{S''\}$, daß also entweder $S_x = S''$ oder S'' nicht ausgezeichnet ist. Daher muß $L_E(S_x)$ ein Summand der Zerspaltung sein, w. z. z. w. Wir haben somit den

Satz. *Für ein beliebiges Simplex S und eine in $L(S)$ enthaltene Menge E positiven Ranges gibt es genau eine Zerspaltung von E bezüglich S. In ihr treten genau sämtliche bezüglich E maximal ausgezeichnete Seiten von S auf.*

Wir bezeichnen die eindeutig definierten E-Mannigfaltigkeiten $L_E(S_j)$ der Zerspaltung von E bezüglich S als die Zerspaltungsmannigfaltigkeiten von E bezüglich S.

6. 4. Wir sagen, die Seiten $S_1, \ldots, S_t$ des Simplexes bilden eine (S_1 und S_t verbindende) Kette, wenn je zwei aufeinanderfolgende Seiten S_i und S_{i+1} mindestens eine

Ecke gemeinsam haben [19]). Eine Menge M von Seiten des Simplexes S heiße zusammenhängend, wenn je zwei Seiten aus M durch eine Kette von Seiten aus M verbunden sind.

Ist $E = L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$ die Zerspaltung der Menge E in Bezug auf das Simplex S, so ist die Menge N der Simplexe $S_1, \ldots, S_k$ Summe endlich vieler größter zusammenhängender Teilmengen $N_1, \ldots, N_h$ ($h \geqq 1$). Aus dieser Definition folgt sofort:

Sind S_i und S_j zwei Simplexe von N, die zu zwei verschiedenen der Mengen $N_1, \ldots, N_h$ gehören, so sind S_i und S_j fremd.

Sind $S_1^i, \ldots, S_{ki}^i$ die Simplexe der Menge N_i, so nennen wir die Menge $L_E(S_1^i) + \cdots + L_E(S_{ki}^i)$ eine Zerspaltungskomponente von E bezüglich S.

6. 4. 1. Eine Beziehung zwischen Zerspaltung und direkter Zerlegung wird gegeben durch den folgenden

Satz. *Ist E eine beliebige Menge positiven Ranges aus $[H; A]$ und bildet das Simplex S eine* innere *Basis von E, so sind die Zerspaltungskomponenten von E bezüglich S identisch mod L^0 mit den A-Komponenten von E.*

Beweis. Es sei $E = K_1 + \cdots + K_n$ die (mod L^0 eindeutig bestimmte) feinste direkte Zerlegung von E (Nr. **5.** 4, **III**). Setzen wir $S_\nu = S \cdot K_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), so ist $S = S_1 + \cdots + S_n$ mit paarweise fremden S_ν (vgl. Nr. **5.** 3, **I.** 1) und $L_E(S_\nu) = K_\nu$ mod L^0 (wegen $L_E(S_\nu) = L_E(S) \cdot L_E(K_\nu) = E \cdot K_\nu = K_\nu$). Zufolge Nr. **6.** 2 ist daher jede bezüglich E (insbesondere maximal) ausgezeichnete Seite von S in genau einem S_ν enthalten, also jede Zerspaltungsmannigfaltigkeit in genau einem $L_E(S_\nu)$. Wegen der Fremdheit der S_ν ist sogar jede Zerspaltungs*komponente* in genau einer $L_E(S_\nu)$ enthalten. Schließlich kann ein- und dieselbe $L_E(S_\nu)$, z. B. $K_1 = L_E(S_1)$, nicht mehrere Zerspaltungskomponenten enthalten. In der Tat: Da jeder gewöhnliche Punkt von K_1 zu (mindestens) einer bezüglich E maximal ausgezeichneten Seite von S gehört und daher in (mindestens) einer Zerspaltungskomponente enthalten ist, kann K_1 mod L^0 als Summe von Zerspaltungskomponenten Z_j von E bezüglich S dargestellt werden. Es sei etwa

$$K_1 = Z_1 + \cdots + Z_h \bmod L^0,$$

ferner sei $S_{1j} = S_1 \cdot Z_j$. Zufolge Definition der Z_j sind die S_{1j} fremd; wegen

$$S_1 = S_{11} + \cdots + S_{1h} \text{ ist daher } L_E(S_1) = L_E(S_{11}) + \cdots + L_E(S_{1h}) = K_1$$

eine direkte Summe (Nr. **5.** 2, Satz). Wegen der direkten Unzerlegbarkeit von K_1 ist somit genau eine der $L_E(S_{1j})$, etwa $L_E(S_{11})$, nicht leer mod L^0. Dann sind aber die $S_{12}, \ldots, S_{1h}$ sämtlich leer mod L^0, also auch die $Z_2, \ldots, Z_h$, w. z. z. w.

§ 7. Anhang.

7. 1. *Ausgezeichnete Basen.* Es sei S ein Simplex, welches zugleich eine (nicht notwendig innere) Basis von E darstellt. Die Zerspaltung von E bezüglich S besteht dann und nur dann mod L^0 aus einer einzigen Zerspaltungsmannigfaltigkeit, wenn S ausgezeichnet ist bezüglich E; in diesem Falle heiße S kurz eine ausgezeichnete Basis von E. Da das Vorhandensein einer ausgezeichneten inneren Basis einen für andere Zwecke besonders leicht zugänglichen Fall darstellt, sei darüber noch einiges bemerkt.

Die Existenz einer ausgezeichneten inneren Basis ist hinreichend für die direkte Unzerlegbarkeit von E (Nr. **6.** 2). Daß sie im allgemeinen nicht notwendig ist, ergibt sich aus dem

[19]) Die Gesamtheit der Seiten (beliebigen Ranges) eines Simplexes bildet einen *Graph*, wenn ihr eine symmetrische, nicht-reflexive Relation (Relation des „Benachbartseins") aufgeprägt ist, indem zwei Seiten als benachbart erklärt werden, sobald sie (mindestens) einen Eckpunkt gemeinsam haben. Vgl. K. Menger, Kurventheorie. Herausgeg. unter Mitarbeit von G. Nöbeling, Leipzig 1932, S. 221.

Satz. *Für Mengen von einem (positiven) Range $r \leqq 3$ ist die direkte Unzerlegbarkeit notwendig und hinreichend für die Existenz (mindestens) einer ausgezeichneten inneren Basis. Hingegen gibt es direkt unzerlegbare Mengen vom Range $r \geqq 4$, welche keine einzige ausgezeichnete innere Basis besitzen.*

Beweis [20]). A) Für $r = 1$ klar. — Es sei also $r = 2$ und $E = L[a, b]$. Ist E unzerlegbar, so enthält $E - (L[a] + L[b])$ einen gewöhnlichen Punkt, welcher also allgemein ist bezüglich $[a, b]$. *Im Falle* $r = 2$ ist daher sogar *jede Basis ausgezeichnet, wenn direkte Unzerlegbarkeit vorliegt.*

B) Schließlich sei $r = 3$ und $E = L[a, b, c]$ unzerlegbar.

I. O. B. d. A. kann $[a, b, c]$ als nicht ausgezeichnet bezüglich E angenommen werden, so daß für jeden Punkt $z \varepsilon E$ gilt: Entweder $z \varepsilon L[a, b]$ oder $z \varepsilon L[b, c]$ oder $z \varepsilon L[c, a]$. Aus der Unzerlegbarkeit von E folgt dann: In mindestens zwei der Seitenmannigfaltigkeiten von $[a, b, c]$, z. B. auf $L[a, b]$ und auf $L[b, c]$, gibt es (gewöhnliche) Punkte x bzw. y von E mit $U[x, a]$ und $U[x, b]$ bzw. mit $U[y, b]$ und $U[y, c]$; andernfalls würde nämlich für jedes $z \varepsilon E$ gelten: Entweder $A[a, z]$ oder $A[b, c, z]$, d. h. es wäre $E = L[a] + L[b, c]$, also E zerlegbar.

II. Die in I. erklärten Punkte x, y liefern $[c, a, y]$ als ausgezeichnete Basis mit x als allgemeinem Punkte bezüglich $[c, a, y]$. In der Tat: Zunächst ist $U[c, a, y]$; denn aus $y \varepsilon L[c, a]$ würde wegen $y \varepsilon L[b, c]$ folgen: $y \varepsilon L[c] = L[c, a] \cdot L[c, b]$ (gemäß $U[a, b, c]$ und Nr. **2.** 2, **VII**), im Widerspruch mit $U[c, y]$. Daher ist $[c, a, y]$ Basis von E. Entsprechend folgt $U[c, a, x]$ wegen $A[a, b, x]$, $U[a, x]$ und $U[a, b, c]$. Weiter ist $U[a, y, x]$, weil andernfalls wegen (A) (Nr. **1.** 2) aus $A[a, b, x]$ und $U[a, x]$ folgen würde: $A[a, b, y]$, was wegen $A[b, c, y]$ zu $A[b, y]$ führen würde (vgl. den Beweis für $U[c, a, y]$ oben). Entsprechend folgt $U[c, y, x]$.

C) Für $r = 4$ gibt es folgendes Beispiel einer unzerlegbaren Menge E ohne ausgezeichnete Basis: Im euklidischen R_3 seien die Punkte $a_1, \ldots, a_6$ so gewählt, daß die durch a_j und a_{j+1}, $j = 1, 3, 5$, bestimmten drei Geraden parallel sind, aber nicht in der gleichen Ebene liegen. A sei die gewöhnliche lineare Abhängigkeit im R_3, also $A[a_1, a_2, a_3, a_4]$ usw. Wir setzen $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, so daß $E = L_E[a_1, a_2, a_3, a_5]$ genau $2^2 \cdot 3 = 12$ verschiedene Basen besitzt. Die behaupteten Eigenschaften von E folgen durch leichte Diskussion der verschiedenen Basen, insbesondere folgt die Unzerlegbarkeit mit Hilfe von Nr. **5.** 5, **II**.

Das Vorhandensein (mindestens) einer ausgezeichneten Basis zieht das anderer solcher Basen nach sich. Es besteht nämlich der

Satz. *Die Menge E von positivem Range r besitze mindestens eine ausgezeichnete innere Basis. Dann existiert zu jedem gewöhnlichen Punkte x von E eine innere (ausgezeichnete) Basis B_x von E, bezüglich deren x allgemeiner Punkt ist.*

Beweis. Es sei $S = [e_1, \ldots, e_r]$ eine ausgezeichnete innere Basis von E. O. B. d. A. können wir annehmen, daß die zu x gehörige Seite S_x von S höchstens vom Range $r - 1$ und daß $S_x = [e_1, \ldots, e_k]$ ist $(1 \leqq k < r)$.

Nun sei e_{r+1} ein bezüglich S allgemeiner Punkt von E. Da e_{r+1} auf keiner echten Seitenmannigfaltigkeit von S liegt, ist $U[e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}]$. Wir zeigen, daß z. B. $B_x = [e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}]$ eine Basis im Sinne der Behauptung ist. In der Tat: Zunächst ist B_x innere Basis von E. Setzen wir $L_j = L[e_2, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_r, e_{r+1}]$, $j = 2, \ldots, r + 1$, und $L_x = L(S_x)$, so gilt (gemäß Nr. **2.** 2, **VII**):

$$(1) \qquad L_x \cdot L_j = L[e_2, \ldots, e_k] \text{ bzw. } = L[e_2, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_k]$$

je nachdem $k < j \leqq r + 1$ bzw. $2 \leqq j \leqq k$.

---

[20]) Statt $L_E[\ldots]$ bzw. direkt-unzerlegbar schreiben wir hier kürzer $L[\ldots]$ bzw. unzerlegbar.

Da aber x allgemein ist bezüglich S_x, so kann x zufolge (1) nicht in $L_x \cdot L_j$ enthalten sein, also (weil $x \varepsilon L_x$) auch nicht in L_j, $j = 2, \ldots, r+1$. Somit ist x allgemein bezüglich B_x, w. z. z. w.

7. 2. *Die* $[H; A]$*-Räume als Verbände*[21]). Aus jedem *reduzierten* $[H; A]$-Raum läßt sich folgendermaßen eindeutig ein Verband V gewinnen. Die Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ von V sollen ein-eindeutig den A-Mannigfaltigkeiten *endlichen Ranges* entsprechen. Als *Verknüpfungen* $\cup$ bzw. $\cap$ zwischen den Elementen von V werden erklärt: $\alpha \cup \beta$ bzw. $\alpha \cap \beta$ entspreche der A-Hülle bzw. dem (mengentheoretischen) Durchschnitt der den α bzw. β zugeordneten A-Mannigfaltigkeiten. (In der Tat entspricht dann $\alpha \cup \beta$ bzw. $\alpha \cap \beta$ der kleinsten bzw. größten α und β enthaltenden bzw. in α und β enthaltenen A-Mannigfaltigkeit; vgl. Nr. **4.** 1, **II** bzw. Nr. **2.** 2, **VIII.**) Die Verbandsaxiome sind erfüllt[22]). Den *Punkten von H entsprechen* in *V ein-eindeutig* die (von uns so genannten) Primelemente von V, d. h. diejenigen, welche keinen *nicht leeren*, *echten* Teil enthalten. Den *A-Hüllen gegebener Punkte* $x_1, \ldots, x_n$ entsprechen die von uns als π-Verbindungen $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_n$ bezeichneten Verbindungen der den x_ν zugeordneten Primelemente π_ν, $\nu = 1, \ldots, n$; es heiße n die Länge dieser π-Verbindung.

Zufolge Nr. **2.** 2, **I** ist $[x_1, \ldots, x_n]$ *dann und nur dann unabhängig, wenn die entsprechende* π*-Verbindung* unverkürzbar ist, d. h. wenn keines der π_ν in der aus den übrigen gebildeten π-Verbindung enthalten ist, $\nu = 1, \ldots, n$. *Abhängigen Systemen und nur solchen entsprechen* verkürzbare, d. h. nicht unverkürzbare, π*-Verbindungen. Schließlich entspricht der Darstellung einer A-Mannigfaltigkeit als A-Hülle einer Basis ein-eindeutig die Darstellung des zugehörigen Elementes* α *von V als eine* unverkürzbare *Verbindung*: $\alpha = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_n$; kürzer: Unverkürzbare π-Darstellung von α.

Unser Verband V ist nun speziell ein A-Verband, d. h. er genügt folgenden zusätzlichen Forderungen[23]), die unmittelbar aus der Definition des reduzierten $[H; A]$ und der A-Mannigfaltigkeit, sowie aus Nr. **2.** 2, **I** gewonnen werden.

F_1. Es besitzt V die leere Menge als (einziges) Nullelement (kleinstes Element). Es gilt die absteigende Kettenbedingung[24]).

F_2. Ist $\alpha = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_n$ eine unverkürzbare π-Darstellung von α, so gilt:

F_{21}. Ein Primelement π ist dann und nur dann in α enthalten, wenn $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_n \cup \pi$ verkürzbar ist.

F_{22}. Ferner ist *jede* mit irgendwelchen Primelementen aus α gebildete π-Verbindung verkürzbar, falls ihre Länge größer als n ist.

F_3. Jedes Element von V besitzt eine unverkürzbare π-Darstellung.

Wir haben zu zeigen, daß auch umgekehrt jedem A-Verband V eindeutig ein reduzierter $[H; A]$-Raum sich zuordnen läßt. Dazu erkläre man die Punkte des letzteren als ein-eindeutige Bilder der Primelemente von V; solche gibt es wegen F_1 (bei nicht leerem V) immer. Jedem nichtgeordneten System von Primelementen ist damit ein-

[21]) Über die Lehre von den Verbänden vgl. H. Hermes und G. Köthe, Die Theorie der Verbände, Enzyklop. d. math. Wiss. **1**, 2. Aufl., Art. 13, sowie die dort angegebenen Schriften. Durch Herrn G. Köthe werden wir freundlicherweise noch auf die im Septemberheft 1938 des Duke math. Journ. (**4** (1938), S. 455—468) erschienene Arbeit von S. Mac Lane, A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases, aufmerksam gemacht. Herr Mac Lane beschäftigt sich (unter anderem) mit der verbandstheoretischen Formulierung des Abhängigkeitsbegriffes im Sinne der van der Waerdenschen Axiome (vgl. Fußnote 11); entsprechendes ist nachstehend für unsere Abhängigkeitsräume durchgeführt. Im übrigen liegt das Schwergewicht der Untersuchungen von Herrn Mac Lane auf anderen Fragen als denjenigen, welche in den vorangehenden Entwicklungen dieser unserer Arbeit verfolgt wurden. Wir verweisen auf die Mac Lanesche Arbeit und die dort angegebene Literatur.

[22]) Vgl. a. a. O. [21]), Art. 2.

[23]) Für die Auswahl dieser Forderungen war die Rücksicht auf kurze und anschauliche Formulierbarkeit maßgebend, nicht die Rücksicht auf möglichste Schwäche.

[24]) Vgl. a. a. O. [21]), Art. 3.

deutig ein System von Punkten zugeordnet, dessen A-Hülle rückwärts eindeutig die π-Verbindung der Urbildprimelemente entspricht.

Erklärt man jetzt die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Punkte von $[H; A]$ mit Hilfe der Verkürzbarkeit bzw. Unverkürzbarkeit der zugeordneten π-Verbindungen (vgl. oben), so sind zunächst die Abhängigkeitsaxiome erfüllt. In der Tat: Das Koinzidenzaxiom besagt nur, daß $\pi_1 \cup \pi_1$ verkürzbar ist, und das Induktionsaxiom, daß mit $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k$ auch $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k \cup \pi$ verkürzbar ist für jedes Primelement π aus V; beides folgt aber unmittelbar aus der Definition der Verkürzbarkeit. Das Austauschaxiom schließlich ist gleichbedeutend damit, daß aus der Unverkürzbarkeit von $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k$ sowie der Verkürzbarkeit von $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k \cup \pi'$ und von $\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k \cup \pi''$ die Verkürzbarkeit von $\pi_2 \cup \cdots \cup \pi_k \cup \pi' \cup \pi''$ folgt. Aber wegen F_{21} gehören π' und π'' zu $\alpha = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k$, woraus wegen F_{22} die Behauptung folgt. Man kann also mit der Menge der Primelemente von V als Raum H einen Raum $[H; A]$ bilden, wobei zufolge F_{21} und F_3 sowie zufolge der Definition der A-Mannigfaltigkeiten die Elemente von V den Mannigfaltigkeiten in $[H; A]$ ein-eindeutig entsprechen. Ordnet man schließlich der zwischen den Elementen von V erklärten [25]) Bezeichnung $\leqq$ die Beziehung Untermenge-Obermenge in H zu, so entspricht wegen Nr. **4.** 1, **II** und Nr. **2.** 2, **VIII** der Verknüpfung $\cup$ bzw. $\cap$ von beliebigen Elementen von V die Bildung der A-Hülle bzw. des Durchschnittes der entsprechenden A-Mannigfaltigkeiten in $[H; A]$.

Zusammenfassung. *Reduzierte $[H; A]$-Räume und A-Verbände entsprechen einander ein-eindeutig, wenn man Punkte und Primelemente, Abhängigkeit von Punkten und Verkürzbarkeit der zugeordneten π-Verbindungen einander entsprechen läßt.* (Isomorphe Verbände sind dabei als nicht verschieden betrachtet; ebenso A-isomorphe $[H; A]$-Räume.)

Wir bemerken noch, daß *die A-Verbände im allgemeinen* nicht modulare (Dedekindsche) Verbände sind. Zum Beweise genügt die Angabe eines reduzierten $[H; A]$ und in ihm dreier Mannigfaltigkeiten, deren Bilder α, β, γ, wobei $\alpha \leqq \beta$, im zugehörigen A-Verbande der Ungleichung $\alpha \cup (\gamma \cap \beta) \neq (\alpha \cup \gamma) \cap \beta$ genügen.

Beispiel. $[H; A]$ sei der euklidische R_3 mit Abhängigkeitsbegriff im Sinne der üblichen *linearen* Abhängigkeit. α sei das Bild eines Punktes P; β das Bild einer Ebene e, in welcher P liegt; γ das Bild einer Geraden g, welche parallel (fremd) ist zu e. Hier ist $\gamma \cap \beta$ leer, also $\alpha \cup (\gamma \cap \beta) = \alpha$. Andererseits ist $\alpha \cup \gamma$ das Bild der linearen Hülle von P und g, d. h. der Ebene e' durch P und g; somit ist $(\alpha \cup \gamma) \cap \beta$ das Bild des Durchschnittes von e' mit e, d. h. der Geraden g' parallel zu g durch P. Aber $P \neq g'$, w. z. z. w.

Schließlich bemerken wir, daß auch jeder *nicht-reduzierte* $[H; A]$-Raum eindeutig einem A-Verband entspricht (aber nicht umgekehrt); man hat nur entsprechen zu lassen der Menge L^0 von $[H; A]$ das Nullelement von V und der Menge aller zu einem gewöhnlichen Punkte konjugierten Punkte von $[H; A]$ ein Primelement von V vgl. (auch Nr. **3.** 2).

[25]) Vgl. a. a. O. [21]), Art. 2.

Eingegangen 25. März 1939.

Zur Cesàro-Pickschen Geometrie.

Von *Gerhard Kowalewski* in Prag.

Bei jeder r-gliedrigen Transformationsgruppe

$$\xi_1(x, y)\, p + \eta_1(x, y)\, q, \ldots, \xi_r(x, y)\, p + \eta_r(x, y)\, q\,,$$

deren Liesche Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_{11} \cdots \eta_{1,r-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \eta_{r1} \cdots \eta_{r,r-2} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet, gibt es eine Cesàro-Picksche Geometrie [1]). Diese Geometrie benutzt zur Festlegung eines Punktes x^*, y^* seine *Relativkoordinaten* u, v in Bezug auf ein Kurvenelement E von $(r-2)$-ter Ordnung. Kartesische und Relativkoordinaten hängen durch eine Transformation der Gruppe zusammen, und zwar ist

$$(u, v) = (x^*, y^*)\, T_E^{E_0}\,. \tag{1}$$

u, v fallen mit x^*, y^* zusammen, wenn das *Bezugselement* E in das *Anfangselement* E_0 übergeht. Das Anfangselement muß so gewählt werden, daß es die Liesche Determinante nicht zum Verschwinden bringt. Es gibt dann für jedes Element E, das sich in einer gewissen Nachbarschaft von E_0 hält, unter den Transformationen

$$\hat{f} = f + \frac{Xf}{1!} + \frac{X^2 f}{2!} + \cdots \tag{2}$$

eine und nur eine, die E_0 in E überführt. Sie wird mit $T_{E_0}^{E}$ bezeichnet und ihre Umkehrung mit $T_E^{E_0}$.

Xf ist in Formel (2) die Abkürzung für

$$\Sigma\, c_\varrho(\xi_\varrho p + \eta_\varrho q + \eta_{\varrho 1} q_1 + \cdots + \eta_{\varrho, r-2} q_{r-2})\,,$$

also für die $(r-2)$-te Erweiterung von $\Sigma\, c_\varrho(\xi_\varrho p + \eta_\varrho q)$, und f eine willkürliche Funktion von $x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$, ferner $\hat{f}$ dieselbe Funktion von $\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{r-2}$.

Die durch (1) definierten Relativkoordinaten sind Invarianten des Punktes x^*, y^* und des Bezugselements E. Geht man von E zu einem neuen Bezugselement $\overline{E}$ über, so folgt aus (1) und aus

$$(\overline{u}, \overline{v}) = (x^*, y^*)\, T_{\overline{E}}^{E_0} \tag{$\overline{1}$}$$

die *Transformationsformel der Relativkoordinaten*, auch *Identitätsformel* genannt, weil derselbe Punkt x^*, y^* auf verschiedene Elemente $E, \overline{E}$ bezogen wird. Diese Formel lautet

$$(\overline{u}, \overline{v}) = (u, v)\, T_{E_0}^{E}\, T_{\overline{E}}^{E_0}\,. \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. G. Kowalewski, Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen, Berlin 1931.

$T^{E}_{E_0}\,T^{E_0}_{\bar{E}}$ ist eine Transformation der Gruppe. Sie bleibt dieselbe, wenn man E und $\bar{E}$ durch $(E)S$ und $(\bar{E})S$ ersetzt, wobei S der Gruppe entnommen ist. Läßt man S insbesondere mit $T^{E_0}_{E}$ zusammenfallen, so wird $(E)S = E_0$ und (3) nimmt folgende Gestalt an:

$$(3^*) \qquad (\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)\,T^{E_0}_{(E)T^{E_0}_{E}}\,.$$

Als Parameter der Transformation erscheinen hier die kartesischen Koordinaten des Elements $(\bar{E})T^{E_0}_{E}$. Sie sind, wie ein Blick auf (1) erkennen läßt, die Relativkoordinaten von $\bar{E}$ in Bezug auf E.

Das Hauptinstrument der Cesàro-Pickschen Geometrie ist die infinitesimale Fassung der Identitätsformel, die sich aus (3*) ergibt, wenn man annimmt, daß E und $\bar{E}$ unendlich benachbarte Elemente einer Kurve $\mathfrak{K}$ sind. Diese spezielle Identitätsformel, auch ohne jedes Beiwort *Identitätsformel* genannt, lautet

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \xi^0_1 & \eta^0_1 & \eta^0_{11} \cdots \eta^0_{1,r-3} & \eta^0_{1,r-2} & W_1 f \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^0_r & \eta^0_r & \eta^0_{r1} \cdots \eta^0_{r,r-3} & \eta^0_{r,r-2} & W_r f \\ 1 & y^0_1 & y^0_2 \cdots y^0_{r-2} & I & -\dfrac{df}{d\sigma} \end{vmatrix} = 0.$$

Der obere Index 0 bedeutet den Übergang zum Anfangselement, das die Koordinaten $x^0, y^0, y^0_1, \ldots, y^0_{r-2}$ hat. I und $d\sigma$ sind die *Differentialinvariante* und das *Bogenelement*, geeicht auf E_0, d. h. so gewählt, daß sie sich beim Übergange zu E_0 auf y_{r-1} und dx reduzieren. Schließlich sind $W_1 f, \ldots, W_r f$ die Symbole

$$\xi_1(u, v)\,\frac{\partial f}{\partial u} + \eta_1(u, v)\,\frac{\partial f}{\partial v}, \ldots, \xi_r(u, v)\,\frac{\partial f}{\partial u} + \eta_r(u, v)\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ein bequemer Weg zur Gewinnung der Identitätsformel (4) ist dieser:

Man stellt zunächst folgende Gleichungen auf, die *vorbereitenden Gleichungen*, wie ich sie nenne:

$$\xi^0_1 p^0 + \eta^0_1 q^0 + \cdots + \eta^0_{1,r-3} q^0_{r-3} + \eta^0_{1,r-2} q^0_{r-2} = \xi_1(u, v)\,\frac{\partial f}{\partial u} + \eta_1(u, v)\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \

Anwendung der Klammeroperation die ganze Gruppe aufbauen. Ich kann dieses Ergebnis jetzt noch etwas vervollkommnen. Es genügt nämlich, wie sich zeigen wird, immer wieder mit $X_I f$ zu klammern. Alle Gruppen mit von Null verschiedener Liescher Determinante zeigen also folgenden Aufbau:

$$(5) \qquad X_I f,\ X_{II} f,\ (X_I X_{II}),\ (X_I(X_I X_{II})), \ldots .$$

$X_I f$, $X_{II} f$ nenne ich die *Stammtransformationen* der Gruppe. Konstante Faktoren, die man ihnen beigibt, sind belanglos.

Wir werden nunmehr für alle Gruppen der Ebene, die eine nicht verschwindende Liesche Determinante haben oder, wie ich sage, *elementtransitiv* sind, die Stammtransformationen bestimmen und das Strukturgesetz (5) bestätigen.

Aufstellung von Stammtransformationen für alle elementtransitiven Gruppen der Ebene.

Von den zweigliedrigen Typen

$$\boxed{p, q}, \qquad \boxed{p,\ xp + q}$$

können wir absehen. Es bleiben dann noch 22 Gruppen zu behandeln [4]).

1. $\boxed{p,\ q,\ xp + (x + y)\, q}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xp + (x + y)\, q + q_1 .$$

Liesche Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & x + y & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0 .$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = u \frac{\partial f}{\partial u} + (u + v) \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$p^0 + I q_1^0 = - \frac{df}{d\sigma} .$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = - \frac{\partial f}{\partial u} - I \left\{ u \frac{\partial f}{\partial u} + (u + v) \frac{\partial f}{\partial v} \right\} .$$

Stammtransformationen:

$$X_I f = p, \quad X_{II} f = xp + (x + y) q .$$

Aufbau:

$$(X_I X_{II}) = p + q .$$

2. $\boxed{p,\ xp + q,\ \ \tfrac{1}{2} x^2 p + xq}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ xp + q - y_1 q_1,\ \ \tfrac{1}{2} x^2 p + xq + (1 - x y_1)\, q_1 .$$

Liesche Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & - y_1 \\ \tfrac{1}{2} x^2 & x & 1 - x y_1 \end{vmatrix} = 1 .$$

[4]) Vgl. G. Kowalewski, Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Leipzig 1931, S. 315ff.

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0 .$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = u\,\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = \frac{1}{2}\,u^2\,\frac{\partial f}{\partial u} + u\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$p^0 + I q_1^0 = -\frac{df}{d\sigma} .$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - I\left(\frac{1}{2}\,u^2\,\frac{\partial f}{\partial u} + u\,\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}} f = p, \qquad X_{\mathrm{II}} f = \tfrac{1}{2}\,x^2 p + xq .$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{II}}) = xp + q .$$

3. $\boxed{p,\ \omega_1 q, \ldots, \omega_{s+1} q}$ $(s > 0)$.

$\omega_1, \ldots, \omega_{s+1}$ bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$(*) \qquad \omega^{(s+1)} = c_0\,\omega^{(s)} + \cdots + c_s\,\omega .$$

Erweiterte Symbole:

$$\begin{gathered} p,\ \omega_1 q + \omega_1' q_1 + \cdots + \omega_1^{(s)} q_s , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_{s+1} q + \omega_{s+1}' q_1 + \cdots + \omega_{s+1}^{(s)} q_s . \end{gathered}$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1' & \ldots & \omega_1^{(s)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega_{s+1} & \omega_{s+1}' & \ldots & \omega_{s+1}^{(s)} \end{vmatrix} = k\,e^{c_0 x} \qquad (k \neq 0).$$

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \ \ldots, \ y_s^0 = 0.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \omega_1(0)\,q^0 + \omega_1'(0)\,q_1^0 + \cdots + \omega_1^{(s)}(0)\,q_s^0 = \omega_1(u)\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_{s+1}(0)\,q^0 + \omega_{s+1}'(0)\,q_1^0 + \cdots + \omega_{s+1}^{(s)}(0)\,q_s^0 = \omega_{s+1}(u)\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$p^0 + I q_s^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - I\omega_*(u)\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

wobei

$$\omega_*(u) = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} \omega_1(0) & \ldots & \omega_1^{(s-1)}(0) & \omega_1(u) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \omega_{s+1}(0) & \ldots & \omega_{s+1}^{(s-1)}(0) & \omega_{s+1}(u) \end{vmatrix}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}} f = p, \qquad X_{\mathrm{II}} f = \omega_*(x)\,q .$$

$\omega_*(x)$ ist diejenige Lösung der Differentialgleichung (*), die für $x=0$ nebst ihren Ableitungen bis zur $(s-1)$-ten Ordnung verschwindet, während die s-te Ableitung gleich 1 ist. Man hat also $\omega_*(x)=\frac{x^s}{s!}+\cdots$ und $\omega_*, \omega_*', \ldots, \omega_*^{(s)}$ bilden ein Fundamentalsystem. $\omega_*(x)$ nennt man die *Grundlösung* der Differentialgleichung (*).

Aufbau: Durch fortgesetztes Klammern mit $X_I f$ erhält man aus $\omega_*(x)q$

$$\omega_*'(x)q, \ldots, \omega_*^{(s)}(x)q,$$

also die ganze Gruppe.

4. $\boxed{p,\ q,\ xq,\ x^2q,\ xp+yq,\ x^2p+2xyq}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq+q_1,\ x^2q+2xq_1+2q_2,$$
$$xp+yq-y_2q_2-2y_3q_3-3y_4q_4,$$
$$x^2p+2xyq+2yq_1+2(y_1-xy_2)q_2-4xy_3q_3-(4y_3+6xy_4)q_4$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf $16y_3^2$.

Anfangselement:

$$x^0=0,\quad y^0=0,\quad y_1^0=0,\quad y_2^0=0,\quad y_3^0=1,\quad y_4^0=0.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0=\frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0=\frac{\partial f}{\partial v},\quad q_1^0=u\frac{\partial f}{\partial v},\quad 2q_2^0=u^2\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$-2q_3^0=u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v},\quad -4q_4^0=u^2\frac{\partial f}{\partial u}+2uv\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$p^0+q_2^0+Iq_4^0=-\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma}=-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{2}u^2\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{4}I\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u}+2uv\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_I f=p+\tfrac{1}{2}x^2q,\quad X_{II}f=x^2p+2xyq.$$

Aufbau:

$$(X_I X_{II})=2(xp+yq)=2X_{III}f,$$
$$(X_I X_{III})=p-\tfrac{1}{2}x^2q=X_{IV}f,$$
$$(X_I X_{IV})=-2xq=-2X_V f,$$
$$(X_I X_V)=q=X_{VI}f.$$

5. $\boxed{p,\ q,\ xq,\ldots,\frac{x^s}{s!}q,\ xp+yq}$ $(s>0)$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq+q_1,\ldots,\frac{x^s}{s!}q+\frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q_1+\cdots+q_s,$$
$$xp+yq-y_2q_2-\cdots-sy_{s+1}q_{s+1}.$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf $-sy_{s+1}$.

Anfangselement:

$$x^0=0,\quad y^0=0,\quad y_1^0=0,\ldots,y_s^0=0,\quad y_{s+1}^0=1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v}, \ldots, q_s^0 = \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v}, \quad -sq_{s+1}^0 = u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$p^0 + q_s^0 + Iq_{s+1}^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{s}I\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + \frac{x^s}{s!}q, \quad X_{\mathrm{II}}f = xp + yq.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = p + (1-s)\frac{x^s}{s!}q = X_{\mathrm{III}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = -s\frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q = -sX_{\mathrm{IV}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) = \frac{x^{s-2}}{(s-2)!}q, \ldots.$$

Der letzte Klammerausdruck ist q.

6. $\boxed{p,\ q,\ yq,\ y^2q}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ yq + y_1q_1 + y_2q_2,\ y^2q + 2yy_1q_1 + (2y_1^2 + 2yy_2)q_2.$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf $2y_1^3$.

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 1, \quad y_2^0 = 0.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = v\frac{\partial f}{\partial v}, \quad 2q_2^0 = v^2\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$p^0 + q^0 + Iq_2^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}Iv^2\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + q, \quad X_{\mathrm{II}}f = y^2q.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = 2yq = 2X_{\mathrm{III}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = q = X_{\mathrm{IV}}f.$$

7. $\boxed{p,\ q,\ (c+1)xp + (c-1)yq}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ (c+1)xp + (c-1)yq - 2y_1q_1.$$

Liesche Determinante: $-2y_1$.

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad -2q_1^0 = (c+1)\,u\,\frac{\partial f}{\partial u} + (c-1)\,v\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$p^0 + q^0 + Iq_1^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}\,I\left\{(c+1)\,u\,\frac{\partial f}{\partial u} + (c-1)\,v\,\frac{\partial f}{\partial v}\right\}.$$

Stammtransformationen:

$$X_I f = p + q, \qquad X_{II} f = (c+1)xp + (c-1)yq.$$

Aufbau:

$$(X_I X_{II}) = (c+1)p + (c-1)q.$$

8. $\boxed{p + y(xp+yq),\quad q + x(xp+yq),\quad xp - yq}$.

Erweiterte Symbole:

$$(1+xy)p + y^2q + y_1(y - xy_1)q_1,$$
$$x^2p + (1+xy)q + (y - xy_1)q_1,$$
$$xp - yq - 2y_1q_1.$$

Liesche Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+xy & y^2 & y_1(y-xy_1) \\ x^2 & 1+xy & y-xy_1 \\ x & -y & -2y_1 \end{vmatrix} = (1+2xy)\,\{(y-xy_1)^2 - 2y_1\}.$$

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \qquad y^0 = 0, \qquad y_1^0 = 1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u} + v\left(u\,\frac{\partial f}{\partial u} + v\,\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$
$$q^0 = \frac{\partial f}{\partial v} + u\left(u\,\frac{\partial f}{\partial u} + v\,\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$
$$-2q_1^0 = u\,\frac{\partial f}{\partial u} - v\,\frac{\partial f}{\partial v} - 2v_1\,\frac{\partial f}{\partial v_1},$$
$$p^0 + q^0 + Iq_1^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - (u+v)\left(u\,\frac{\partial f}{\partial u} + v\,\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\,I\left(u\,\frac{\partial f}{\partial u} - v\,\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_I f = p + q + (x+y)(xp+yq), \qquad X_{II} f = xp - yq.$$

Aufbau:

$$(X_I X_{II}) = \{p + y(xp+yq)\} - \{q + x(xp+yq)\} = X_{III} f.$$

9. $\boxed{p,\ q,\ xp,\ yq,\ x^2p,\ y^2q}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xp - y_1q_1 - 2y_2q_2 - 3y_3q_3 - 4y_4q_4,$$
$$yq + y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3 + y_4q_4,$$
$$x^2p - 2xy_1q_1 - (2y_1 + 4xy_2)q_2 - (6y_2 + 6xy_3)q_3 - (12y_3 + 8xy_4)q_4,$$
$$y^2q + 2yy_1q_1 + (2y_1^2 + 2yy_2)q_2 + (6y_1y_2 + 2yy_3)q_3 + (6y_2^2 + 8y_1y_3 + 2yy_4)q_4.$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf $-y_1(6y_2^2 - 4y_1y_3)^2$.
Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 1, \quad y_2^0 = 1, \quad y_3^0 = 0, \quad y_4^0 = 0.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad -q_1^0 - 2q_2^0 = u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad q_1^0 + q_2^0 = v\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$-2q_2^0 - 6q_3^0 = u^2\frac{\partial f}{\partial u}, \quad 2q_2^0 + 6q_3^0 + 6q_4^0 = v^2\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$p^0 + q^0 + q_1^0 + I\,q_4^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - u\frac{\partial f}{\partial u} - 2v\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{6}I\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + q + xp + 2yq, \quad X_{\mathrm{II}}f = x^2p + y^2q.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = 2xp + 2yq + x^2p + 2y^2q = X_{\mathrm{III}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = 2(p + q + xp + 2yq) + x^2p + 4y^2q = X_{\mathrm{IV}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) = 2xp + 8yq + x^2p + 8y^2q = X_{\mathrm{V}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{V}}) = 2p + 8q + 2xp + 16yq + x^2p + 16y^2q = X_{\mathrm{VI}}f.$$

10. $\boxed{p,\ q,\ xp,\ yq,\ y^2q}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xp - y_1q_1 - 2y_2q_2 - 3y_3q_3,$$
$$yq + y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3,$$
$$y^2q + 2yy_1q_1 + (2y_1^2 + 2yy_2)q_2 + (6y_1y_2 + 2yy_3)q_3.$$

Liesche Determinante: $2y_1^2(3y_2^2 - 2y_1y_3)$.
Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 1, \quad y_2^0 = 0, \quad y_3^0 = 1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad -q_1^0 - 3q_3^0 = u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad q_1^0 + q_3^0 = v\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$2q_2^0 = v^2\frac{\partial f}{\partial v}, \quad p^0 + q^0 + q_2^0 + Iq_3^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}v^2\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}I\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + q + \tfrac{1}{2}y^2q, \quad X_{\mathrm{II}}f = xp + yq.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = p + q - \tfrac{1}{2}y^2q = X_{\mathrm{III}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = -2yq = -2X_{\mathrm{IV}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) = q - \tfrac{1}{2}y^2q = X_{\mathrm{V}}f.$$

11. $\boxed{p,\ q,\ xp,\ yq}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xp - y_1q_1 - 2y_2q_2,\quad yq + y_1q_1 + y_2q_2.$$

Liesche Determinante: y_1y_2.

Anfangselement:

$$x^0 = 0,\quad y^0 = 0,\quad y_1^0 = 1,\quad y_2^0 = 1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v},\quad -q_1^0 - 2q_2^0 = u\frac{\partial f}{\partial u},\quad q_1^0 + q_2^0 = v\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$p^0 + q^0 + q_1^0 + Iq_2^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - u\frac{\partial f}{\partial u} - 2v\frac{\partial f}{\partial v} + I\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_If = p + q + xp + 2yq,\quad X_{II}f = xp + yq.$$

Aufbau:

$$(X_IX_{II}) = p + q = X_{III}f,$$
$$(X_IX_{III}) = -p - 2q = -X_{IV}f.$$

12. $\boxed{p,\ q,\ xq,\ 2xp + yq,\ x(xp + yq)}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1,\quad 2xp + yq - y_1q_1 - 3y_2q_2 - 5y_3q_3,$$
$$x^2p + xyq + (y - xy_1)q_1 - 3xy_2q_2 - (3y_2 + 5xy_3)q_3.$$

Liesche Determinante: $9y_2^2$.

Anfangselement:

$$x^0 = 0,\quad y^0 = 0,\quad y_1^0 = 0,\quad y_2^0 = 1,\quad y_3^0 = 0.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v},\quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v},\quad -3q_2^0 = 2u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$-3q_3^0 = u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v},\quad p^0 + q_1^0 + Iq_3^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{3}Iu\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_If = p + xq,\quad X_{II}f = x(xp + yq).$$

Aufbau:

$$(X_IX_{II}) = 2xp + yq = X_{III}f,$$
$$(X_IX_{III}) = 2p - xq = X_{IV}f,$$
$$(X_IX_{IV}) = -3q = -3X_Vf.$$

13. $\boxed{p,\ q,\ xq, \ldots, \frac{x^s}{s!}q, \quad 2xp + syq, \quad x(xp + syq)}$ $(s > 2)$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1, \ldots, \frac{x^s}{s!}q + \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q_1 + \cdots + q_s,$$

$$2xp + syq + (s-2)y_1q_1 - \cdots - (s+2)y_{s+1}q_{s+1} - (s+4)y_{s+2}q_{s+2},$$

$$x^2p + sxyq + \cdots + \{\varrho(s-\varrho+1)y_{\varrho-1} + (s-2\varrho)xy_\varrho\}q_\varrho + \cdots$$
$$\cdots - (s+2)xy_{s+1}q_{s+1} - \{(s+2)y_{s+1} + (s+4)xy_{s+2}\}q_{s+2}.$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} (s+2)y_{s+1} & (s+4)y_{s+2} \\ (s+2)xy_{s+1} & (s+2)y_{s+2} + (s+4)xy_{s+2} \end{vmatrix} = (s+2)^2 y_{s+1}^2.$$

Anfangselement:

Alle Koordinaten gleich Null bis auf $y_{s+1}^0 = 1$.

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v}, \ldots, q_s^0 = \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$-(s+2)q_{s+1}^0 = 2u\frac{\partial f}{\partial u} + sv\frac{\partial f}{\partial v}, \quad -(s+2)q_{s+2}^0 = u\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + sv\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

$$p^0 + q_s^0 + Iq_{s+2}^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{s+2}Iu\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + sv\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + \frac{x^s}{s!}q, \quad X_{\mathrm{II}}f = x(xp + syq).$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = 2xp + syq = X_{\mathrm{III}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = 2p - \frac{x}{(s-1)!}q = X_{\mathrm{IV}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) = -(s+2)\frac{x^{s-1}}{(s-1)!} = -(s+2)X_{\mathrm{V}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{V}}) = \frac{x^{s-2}}{(s-2)!}q = X_{\mathrm{VI}}f$$

usw. bis zu q.

14. $\boxed{p,\ q,\ xq, \ldots, \frac{x^s}{s!}q,\ xp + \gamma yq}$ $(\gamma \neq 1,\ s+1),\ (s > 0)$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1, \ldots, \frac{x^s}{s!}q + \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q_1 + \cdots + q_s,$$

$$xp + \gamma yq + (\gamma-1)y_1q_1 + \cdots + (\gamma-s-1)y_{s+1}q_{s+1}.$$

Liesche Determinante: $(\gamma - s - 1)y_{s+1}$. Damit sie nicht identisch verschwindet, muß $\gamma \neq s+1$ angenommen werden. Durch $\gamma \neq 1$ wird eine schon behandelte Gruppe ausgeschlossen (Nr. 5).

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \ldots, y_s^0 = 0, \quad y_{s+1}^0 = 1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v}, \ldots, q_s^0 = \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$(\gamma - s - 1)\, q_{s+1}^0 = u\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma v \frac{\partial f}{\partial v}, \quad p^0 + q_s^0 + I q_{s+1}^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{s+1-\gamma} I\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma v \frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}} f = p + \frac{x^s}{s!} q, \quad X_{\mathrm{II}} f = xp + \gamma yq\,.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{II}}) = p + (\gamma - s)\frac{x^s}{s!} q = X_{\mathrm{III}} f\,,$$

$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{III}}) = (\gamma - s - 1)\frac{x^{s-1}}{(s-1)!} q = (\gamma - s - 1)\, X_{\mathrm{IV}} f\,,$$

$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{IV}}) = \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} q$$

usw. bis zu q.

15. $\boxed{p,\ q,\ xq, \ldots, \frac{x^s}{s!} q, \quad xp + (s+1)\, yq + \frac{x^{s+1}}{(s+1)!} q}$ $\quad (s > 0)\,.$

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1, \ldots, \frac{x^s}{s!} q + \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} q_1 + \cdots + q_s\,,$$

$$xp + \left\{(s+1)\, y + \frac{x^{s+1}}{(s+1)!}\right\} q + \left(s y_1 + \frac{x^s}{s!}\right) q_1 + \cdots + (y_s + x)\, q_s + q_{s+1}\,.$$

Liesche Determinante: 1.

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \ldots, y_{s+1}^0 = 0\,.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v}, \ldots, q_s^0 = \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v}\,,$$

$$q_{s+1}^0 = u\frac{\partial f}{\partial u} + \left\{(s+1)\, v + \frac{u^{s+1}}{(s+1)!}\right\}\frac{\partial f}{\partial v}, \quad p^0 + I q_{s+1}^0 = -\frac{df}{d\sigma}\,.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - I\left\{u\frac{\partial f}{\partial u} + (s+1)\, v\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{u^{s+1}}{(s+1)!}\frac{\partial f}{\partial v}\right\}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}} f = p, \quad X_{\mathrm{II}} f = xp + (s+1)\, yq + \frac{x^{s+1}}{(s+1)!} q\,.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{II}}) = p + \frac{x^s}{s!} q = X_{\mathrm{III}} f\,,$$

$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{III}}) = \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} q = X_{\mathrm{IV}} f$$

usw. bis zu q.

16. $\boxed{p,\ \omega_1 q, \ldots, \omega_{s+1} q, yq}$ $(s > 0)$.

$\omega_1, \ldots, \omega_{s+1}$ sind Fundamentallösungen von

$$\omega^{(s+1)} = c_0 \omega^{(s)} + \cdots + c_s \omega .$$

Wir dürfen $c_0 = 0$ annehmen. Dies läßt sich dadurch, daß $ye^{\varrho x}$ als neues y eingeführt wird, stets erreichen.
Erweiterte Symbole:

$$p,\ \omega_1 q + \omega_1' q_1 + \cdots + \omega_1^{(s+1)} q_{s+1}, \ldots, \omega_{s+1} q + \omega_{s+1}' q_1 + \cdots + \omega_{s+1}^{(s+1)} q_{s+1} ,$$
$$yq + y_1 q_1 + \cdots + y_{s+1} q_{s+1} .$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1' & \ldots & \omega_1^{(s+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega_{s+1} & \omega_{s+1}' & \ldots & \omega_{s+1}^{(s+1)} \\ y & y_1 & \ldots & y_{s+1} \end{vmatrix} .$$

Da die Wronskische Determinante von $\omega_1, \ldots, \omega_{s+1}$ einen konstanten von Null verschiedenen Wert k hat, so ergibt sich für die Liesche Determinante der Ausdruck

$$k(y_{s+1} - c_1 y_{s-1} - \cdots - c_s y) .$$

Anfangselement:

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \ldots, y_s^0 = 0, \quad y_{s+1}^0 = 1 .$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \omega_1(0)\, q^0 + \omega_1'(0)\, q_1^0 + \cdots + \omega_1^{(s+1)}(0)\, q_{s+1}^0 = \omega_1(u)\, \frac{\partial f}{\partial v} ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_{s+1}(0)\, q^0 + \omega_{s+1}'(0)\, q_1^0 + \cdots + \omega_{s+1}^{(s+1)}(0)\, q_{s+1}^0 = \omega_{s+1}(u)\, \frac{\partial f}{\partial v} ,$$
$$q_{s+1}^0 = v \frac{\partial f}{\partial v} ,$$

$$q^0 + q_s^0 + I q_{s+1}^0 = -\frac{df}{d\sigma} .$$

Hieraus entnimmt man

$$q_s^0 = \omega_*(u) \frac{\partial f}{\partial v},$$

wobei

$$\omega_*(u) = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} \omega_1(0) & \ldots & \omega_1^{(s-1)}(0) & \omega_1(u) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \omega_{s+1}(0) & \ldots & \omega_{s+1}^{(s-1)}(0) & \omega_{s+1}(u) \end{vmatrix}$$

die Grundlösung der Differentialgleichung $\omega^{(s+1)} = c_1 \omega^{(s-1)} + \cdots + c_s \omega$ darstellt.
Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \omega_*(u) \frac{\partial f}{\partial v} - I\, v \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}} f = p + \omega_*(x) q, \qquad X_{\mathrm{II}} f = yq.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{II}}) = \omega_*(x) q = X_{\mathrm{III}} f,$$
$$(X_{\mathrm{I}} X_{\mathrm{III}}) = \omega_*'(x) q = X_{\mathrm{IV}} f$$

usw. bis zu

$$\omega_*^{(s)}(x)\,q\,.$$

17. $\boxed{p,\ q,\ xp,\ xq+\tfrac{1}{2}x^2p}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xp-y_1q_1-2y_2q_2,$$
$$\tfrac{1}{2}x^2p+xq+(1-xy_1)q_1-(y_1+2xy_2)q_2.$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} -y_1 & -2y_2 \\ 1-xy_1 & -y_1-2xy_2 \end{vmatrix} = y_1^2+2y_2.$$

Anfangselement:

$$x^0=0,\quad y^0=0,\quad y_1^0=0,\quad y_2^0=1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0=\frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0=\frac{\partial f}{\partial v},\quad -2q_2^0=u\frac{\partial f}{\partial u},\quad q_1^0=\frac{1}{2}u^2\frac{\partial f}{\partial u}+u\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$p^0+q_1^0+Iq_2^0=-\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma}=-\left(1+\frac{1}{2}u^2\right)\frac{\partial f}{\partial u}-u\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{2}Iu\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Stammtransformationen:

$$X_If=(1+\tfrac{1}{2}x^2)p+xq,\qquad X_{II}f=xp.$$

Aufbau:

$$(X_IX_{II})=(1-\tfrac{1}{2}x^2)p-xq=X_{III}f,$$
$$(X_IX_{III})=-2(xp+q)=-2X_{IV}f.$$

18. $\boxed{p,\ q,\ xq,\ \ldots,\ \frac{x^s}{s!}q,\ xp,\ yq}\quad (s>0).$

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq+q_1,\ \frac{x^s}{s!}q+\frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q_1+\cdots+q_s,$$
$$xp-y_1q_1-2y_2q_2-\cdots-(s+2)y_{s+2}q_{s+2},$$
$$yq+y_1q_1+y_2q_2+\cdots+y_{s+2}q_{s+2}.$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} -(s+1)y_{s+1} & -(s+2)y_{s+2} \\ y_{s+1} & y_{s+2} \end{vmatrix} = y_{s+1}y_{s+2}.$$

Anfangselement:

$$x^0=0,\quad y^0=0,\quad y_1^0=0,\ \ldots,\ y_s^0=0,\quad y_{s+1}^0=1,\quad y_{s+2}^0=1.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0=\frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0=\frac{\partial f}{\partial v},\quad q_1^0=u\frac{\partial f}{\partial v},\ \ldots,\ q_s^0=\frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$-(s+1)q_{s+1}^0-(s+2)q_{s+2}^0=u\frac{\partial f}{\partial u},$$
$$q_{s+1}^0+q_{s+2}^0=v\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$p^0+q_s^0+q_{s+1}^0+Iq_{s+2}^0=-\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial f}{\partial u} + (s+2)v\frac{\partial f}{\partial v} + I\left\{u\frac{\partial f}{\partial u} + (s+1)v\frac{\partial f}{\partial v}\right\}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + \frac{x^s}{s!}q + xp + (s+2)yq, \quad X_{\mathrm{II}}f = xp + (s+1)yq.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = p + \frac{x^s}{s!}q = X_{\mathrm{III}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = -p - 2\frac{x^s}{s!}q = -X_{\mathrm{IV}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) = \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q + \cdots = X_{\mathrm{V}}f,$$

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{V}}) = \frac{x^{s-2}}{(s-2)!}q + \cdots = X_{\mathrm{VI}}f$$

usw. bis zu $q + \cdots$, wobei die Punkte Verbindungen der schon gewonnenen Symbole bedeuten.

19. $\boxed{p,\ q,\ xq, \ldots, \frac{x^s}{s!}q,\ xp,\ yq,\ x(xp+syq)}$ $(s>0)$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1, \ldots, \frac{x^s}{s!}q + \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q_1 + \cdots + q_s,$$

$$xp - y_1q_1 - \cdots - (s+1)y_{s+1}q_{s+1} - (s+2)y_{s+2}q_{s+2} - (s+3)y_{s+3}q_{s+3},$$

$$yq + y_1q_1 + \cdots + y_{s+1}q_{s+1} + y_{s+2}q_{s+2} + y_{s+3}q_{s+3},$$

$$x^2p + sxyq + \cdots + \{\varrho(s-\varrho+1)y_{\varrho-1} + (s-2\varrho)xy_\varrho\}q_\varrho + \cdots - (s+2)xy_{s+1}q_{s+1}$$
$$- \{(s+2)y_{s+1} + (s+4)xy_{s+2}\}q_{s+2} - \{2(s+3)y_{s+2} + (s+6)xy_{s+3}\}q_{s+3}.$$

Liesche Determinante: Sie reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} (s+1)y_{s+1} & (s+2)y_{s+2} & (s+3)y_{s+3} \\ y_{s+1} & y_{s+2} & y_{s+3} \\ (s+2)xy_{s+1} & (s+2)y_{s+1} + (s+4)xy_{s+2} & 2(s+3)y_{s+2} + (s+6)xy_{s+3} \end{vmatrix},$$

d. h. auf

$$2y_{s+1}\{(s+2)y_{s+1}y_{s+3} - (s+3)y_{s+2}^2\}.$$

Anfangselement:

Alle Koordinaten gleich Null bis auf $y^0_{s+1} = y^0_{s+3} = 1$.

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v}, \ldots, q_s^0 = \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$-(s+1)q^0_{s+1} - (s+3)q^0_{s+3} = u\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$q^0_{s+1} + q^0_{s+3} = v\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$-(s+2)q^0_{s+2} = u\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + sv\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

$$p^0 + q^0_s + q^0_{s+2} + Iq^0_{s+3} = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{u^s}{s!}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{s+2}u\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + sv\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}I\left\{u\frac{\partial f}{\partial u} + (s+1)v\frac{\partial f}{\partial v}\right\}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + \frac{x^s}{s!}q - \frac{1}{s+2}x(xp + syq),$$
$$X_{\mathrm{II}}f = xp + (s+1)yq.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = p + \frac{x^s}{s!}q + \frac{1}{s+2}x(xp + syq) = X_{\mathrm{III}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = \frac{2}{s+2}(2xp + syq) = \frac{2}{s+2}X_{\mathrm{IV}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) = 2p - s\frac{x^s}{s!}q + \frac{2}{s+2}x(xp + syq) = -(s+2)X_{\mathrm{V}}f.$$

Offenbar ist

$$X_{\mathrm{V}}f = \frac{x^s}{s!}q - \frac{2}{s+2}X_{\mathrm{III}}f,$$

so daß sich weiter ergibt

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{V}}) = \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}q - \frac{4}{(s+2)^2}X_{\mathrm{IV}}f.$$

Hierauf findet man durch fortgesetztes Klammern mit $X_{\mathrm{I}}f$

$$\frac{x^{s-1}}{(s-2)!}q + \cdots,\ q + \cdots,$$

wobei die Punkte Verbindungen der schon gewonnenen Symbole bedeuten.

20. $\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1,\ xp - yq - 2y_1q_1 - 3y_2q_2 - 4y_3q_3,$$
$$yp - y_1^2q_1 - 3y_1y_2q_2 - (3y_2^2 + 4y_1y_3)q_3.$$

Liesche Determinante: $9y_2^3$.

Anfangselement:

$$x^0 = 0,\quad y^0 = 0,\quad y_1^0 = 0,\quad y_2^0 = 1,\quad y_3^0 = 0.$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v},\quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v},\quad -3q_2^0 = u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v},\quad -3q_3^0 = v\frac{\partial f}{\partial u},$$
$$p^0 + q_1^0 + Iq_3^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{3}Iv\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + xq,\quad X_{\mathrm{II}}f = yp.$$

Aufbau:

$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) = xp - yq = X_{\mathrm{III}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) = p - 2xq = X_{\mathrm{IV}}f,$$
$$(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) = -3q = -3X_{\mathrm{V}}f.$$

21. $\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1,\ xp - y_1q_1 - 2y_2q_2 - 3y_3q_3 - 4y_4q_4,$$
$$yq + y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3 + y_4q_4,$$
$$yp - y_1^2q_1 - 3y_1y_2q_2 - (3y_2^2 + 4y_1y_3)q_3 - (10y_2y_3 + 5y_1y_4)q_4.$$

Liesche Determinante: $2y_2^2(3y_2y_4 - 5y_3^2)$.

Anfangselement:

$$x^0 = 0,\quad y^0 = 0,\quad y_1^0 = 0,\quad y_1^0 = 1,\quad y_3^0 = 0,\quad y_4^0 = 1\ .$$

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v},\quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$-2q_2^0 - 4q_4^0 = u\frac{\partial f}{\partial u},\quad q_2^0 + q_4^0 = v\frac{\partial f}{\partial v},\quad -3q_3^0 = v\frac{\partial f}{\partial u},$$
$$p^0 + q_1^0 + q_3^0 + Iq_4^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel:

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{3}v\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}I\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + 2v\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Stammtransformationen:

$$X_If = p + xq - \tfrac{1}{3}yp,\quad X_{II}f = xp + 2yq\ .$$

Aufbau:

$$(X_IX_{II}) = p + xq + \tfrac{1}{3}yp = X_{III}f\ ,$$
$$(X_IX_{III}) = \tfrac{2}{3}(xp - yq) = \tfrac{2}{3}X_{IV}f\ ,$$
$$(X_IX_{IV}) = p - 2xq - \tfrac{2}{3}yp = X_Vf\ ,$$
$$(X_IX_V) = -3q - \tfrac{4}{3}(xp - yp) = -3X_{VI}f\ .$$

22. $\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp,\ x(xp + yq),\ y(xp + yq)}$.

Erweiterte Symbole:

$$p,\ q,\ xq + q_1,\ xp - y_1q_1 - 2y_2q_2 - 3y_3q_3 - 4y_4q_4 - 5y_5q_5 - 6y_6q_6\ ,$$
$$yq + y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3 + y_4q_4 + y_5q_5 + y_6q_6\ ,$$
$$yp - y_1^2q_1 - 3y_1y_2q_2 - (3y_2^2 + 4y_1y_3)q_3 - (10y_2y_3 + 5y_1y_4)q_4$$
$$- (10y_3^2 + 15y_2y_4 + 6y_1y_5)q_5 - (35y_3y_4 + 21y_2y_5 + 7y_1y_6)q_6\ ,$$
$$x(xp + yq) + (y - xy_1)q_1 - 3xy_2q_2 - (3y_2 + 5xy_3)q_3 - (8y_3 + 7xy_4)q_4$$
$$(15y_4 + 9xy_5)q_5 - (24y_5 + 11xy_6)q_6\ ,$$
$$y(xp + yq) + y_1(y - xy_1)q_1 - 3xy_1y_2q_2 - \{3y_1y_2 + yy_3 + x(3y_2^2 + 4y_1y_3)\}q_3$$
$$- \{6y_2^2 + 8y_1y_3 + 2yy_4 + x(10y_2y_3 + 5y_1y_4)\}q_4$$
$$- \{30y_2y_3 + 15y_1y_4 + 3yy_5 + x\,(10y_3^2 + 15y_2y_4 + 6y_1y_5)\}q_5$$
$$- \{40y_3^2 + 60y_2y_4 + 24y_1y_5 + 4yy_6 + x(35y_3y_4 + 21y_2y_5 + 7y_1y_6)\}q_6\ .$$

Liesche Determinante: Sie baut sich auf aus y_2 und $9y_2^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3$.

Anfangselement:

Alle Koordinaten gleich Null außer $y_2^0 = y_5^0 = 1$.

Vorbereitende Gleichungen:

$$p^0 = \frac{\partial f}{\partial u},\quad q^0 = \frac{\partial f}{\partial v},\quad q_1^0 = u\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$-2q_2^0 - 5q_5^0 = u\frac{\partial f}{\partial u},\quad q_2^0 + q_5^0 = v\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$-3q_3^0 - 21q_6^0 = v\frac{\partial f}{\partial u},\quad -3q_3^0 - 24q_6^0 = u\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$
$$-6q_4^0 = v\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right),\quad p^0 + q_1^0 + q_4^0 + Iq_6^0 = -\frac{df}{d\sigma}.$$

Identitätsformel [5]):

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{6}\,v\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{1}{3}\,I\left\{u\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right) - v\frac{\partial f}{\partial u}\right\}.$$

Stammtransformationen:

$$X_{\mathrm{I}}f = p + xq - \tfrac{1}{6}\,y(xp + yq)\,,$$
$$X_{\mathrm{II}}f = x(xp + yq) - yp\,.$$

Aufbau:

$$\begin{aligned}
(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}) &= xp + 2yq = X_{\mathrm{III}}f\,,\\
(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{III}}) &= p + xq + \tfrac{1}{3}\,y(xp + yq) = X_{\mathrm{IV}}f\,,\\
(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{IV}}) &= \tfrac{1}{2}\{yp + x(xp + yq)\} = \tfrac{1}{2}\,X_{\mathrm{V}}f\,,\\
(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{V}}) &= 3xp = 3X_{\mathrm{VI}}f\,,\\
(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{VI}}) &= p - xq = X_{\mathrm{VII}}f\,,\\
(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{VII}}) &= -2q + \tfrac{1}{6}\,\{yp - x(xp + yq)\} = -2X_{\mathrm{VIII}}f\,.
\end{aligned}$$

Bei allen hier betrachteten Gruppen haben wir das Strukturgesetz $X_{\mathrm{I}}f$, $X_{\mathrm{II}}f$, $(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}})$, $(X_{\mathrm{I}}(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}))$, ... festgestellt. Durch fortgesetztes Klammern mit $X_{\mathrm{I}}f$ kann man von den beiden Stammtransformationen $X_{\mathrm{I}}f$, $X_{\mathrm{II}}f$ ausgehend die ganze Gruppe aufbauen. $X_{\mathrm{I}}f$ nenne ich die *aktive* oder männliche Stammtransformation, $X_{\mathrm{II}}f$ die *passive* oder weibliche. Bei dreigliedrigen Gruppen ist diese Unterscheidung belanglos.

Im Verzeichnis aller transitiven Gruppen der Ebene treten als einzige Typen mit verschwindender Liescher Determinante die folgenden auf:

$$\boxed{p,\ q,\ xq, \ldots, x^{n-1}q,\ xp + nyq} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Die dem Index n entsprechende Gruppe ist dadurch gekennzeichnet, daß sie die n-te Ableitung y_n invariant läßt. Diese Gruppen fügen sich nicht dem Strukturgesetz $X_{\mathrm{I}}f$, $X_{\mathrm{II}}f$, $(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}})$, $(X_{\mathrm{I}}(X_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{II}}))$, ... Besonders einfach läßt sich dies im Falle $n = 1$ erkennen. Bildet man aus

$$X_{\mathrm{I}}f = a_1p + a_2q + a_3(xp + yq)$$

und

$$X_{\mathrm{II}}f = b_1p + b_2q + b_3(xp + yq)$$

den Klammerausdruck, so ergibt sich

$$(a_1b_3 - a_3b_1)\,p + (a_2b_3 - a_3b_2)\,q = b_3\,X_{\mathrm{I}}f - a_3\,X_{\mathrm{II}}f\,.$$

Man kommt also über die linearen Verbindungen von $X_{\mathrm{I}}f$ und $X_{\mathrm{II}}f$ nicht hinaus.

Im Falle $n > 1$ kann man in folgender Weise die Hinfälligkeit des erwähnten Strukturgesetzes feststellen: Mit Hilfe der Transformation

$$X = x, \qquad Y = y + c_0x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\,,$$

die der Untergruppe q, xq, ..., $x^{n-1}q$ angehört, läßt sich

$$X_{\mathrm{I}}f = ap + b(xp + nyq) + \varphi(x)q$$

auf eine einfachere Form bringen. Ist $b \neq 0$, so können wir schreiben

$$c_0x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} = \gamma_0(a + bx)^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}$$

und

$$\varphi(x) = k_0(a + bx)^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\,.$$

---

[5]) Vgl. hierzu G. Kowalewski, Integrationsmethoden der Lieschen Theorie, Leipzig 1933, S. 179.

Wird nun die angegebene Transformation durchgeführt, so lautet das Ergebnis

$$X_I f = aP + b(XP + nYQ) + \{(k_0 - b\gamma_0)(a + bX)^{n-1} + \cdots + (k_{n-1} - nb\gamma_{n-1})\}Q .$$

Man sieht, daß bei passender Wahl von $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$

$$X_I f = aP + b(XP + nYQ)$$

wird. Nun genügt es, $X + \frac{a}{b}$ als neues X einzuführen, um auch a zum Verschwinden zu bringen, so daß man weiter mit

$$X_I f = xp + nyq$$

zu operieren hat, wenn wieder die kleinen Buchstaben benutzt werden. Klammert man

$$X_{II} f = Ap + A_0 q + A_1 xq + \cdots + A_{n-1} x^{n-1} q + B(xp + nyq)$$

wiederholt mit $xp + nyq$, so multiplizieren sich die einzelnen Glieder bei jedem Schritt mit den Gewichtsfaktoren

$$-1, -n, -(n-1), \ldots, -1, 0 .$$

Aus den so gewonnenen Symbolen lassen sich die Bestandteile

$$Ap + A_{n-1} x^{n-1} q, \quad A_0 q, \quad A_1 xq, \ldots, A_{n-2} x^{n-2} q, \quad B(xp + nyq)$$

aufbauen, nichts weiter. Jedenfalls kommt man über die Untergruppe

$$q, \quad xq, \ldots, x^{n-2} q, \quad Ap + A_{n-1} x^{n-1} q, \quad xp + nyq$$

nicht hinaus.

Es wäre noch die Möglichkeit

$$X_I f = ap + \varphi(x) q$$

zu prüfen. Ist $a \neq 0$, so kann man mittels einer passenden Transformation $X = x$, $Y = y + c_0 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}$ in φ alle Potenzen bis auf die $(n-1)$-te beseitigen, so daß von vornherein

$$X_I f = p + cx^{n-1} q$$

gesetzt werden darf. Klammert man mit $X_{II} f = Ap + B(xp + nyq) + \chi(x) q$, so ergibt sich

$$B(p + cx^{n-1} q) + \{\chi'(x) - (n-1) A c x^{n-2}\} q .$$

Als neuer Baustein wird also nur

$$\{\chi'(x) - (n-1) A c x^{n-2}\} q$$

gewonnen. Man kommt daher bei fortgesetztem Klammern mit $X_I f$ nicht über die Untergruppe

$$X_I f, \quad X_{II} f, \quad q, \quad xq, \ldots, x^{n-2} q$$

hinaus.

Schließlich wäre noch zu erwägen, ob $X_I f = \varphi(x) q$ als aktive Transformation in Frage kommen könnte. Da $(X_I X_{II}) = \varphi_1(x) q$ wird, wobei $\varphi_1(x)$ ebenso wie $\varphi(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades bezeichnet, so ist der nächste Klammerausdruck $(X_I (X_I X_{II}))$ bereits gleich Null. Da im Falle $n > 1$ eine mehr als dreigliedrige Gruppe vorliegt, so wird durch $X_I f$, $X_{II} f$, $(X_I X_{II})$ diese Gruppe nicht erschöpft.

Die Gruppe der Ableitung y_n befolgt also nicht das Strukturgesetz $X_I f$, $X_{II} f$, $(X_I X_{II})$, $(X_I (X_I X_{II}))$, ..., dem sich sonst alle transiven Gruppen der Ebene fügen. Hiermit ist zur gruppentheoretischen Beleuchtung der von Leibniz geschaffenen Grundbegriffe ein bemerkenswerter Beitrag geliefert.

Neue Tafel der elementtransitiven ebenen Transformationsgruppen.

Wir stellen unsere Ergebnisse in Form einer Tabelle zusammen, die für jede elementtransitive Gruppe der Ebene ein Paar von Stammtransformationen verzeichnet, wobei die aktive Stammtransformation an erster Stelle steht. Unsere Untersuchungen knüpften an eine Gruppentafel an, bei der die Gruppen nach ihrer Richtungsgruppe klassifiziert waren. Da diese Klassifikation hier nebensächlich ist, ergeben sich gewisse Zusammenfassungen. Wir können die Gruppen **4** und **12** mit **13** zusammenziehen, indem wir bei **13** für s die Werte 1 und 2 zulassen. Ebenso können wir die Gruppe **5** mit **14** verbinden, indem wir dort $\gamma = 1$ zulassen. Auf diese Weise fallen von den 22 Nummern drei fort. Dafür nehmen wir die beiden zweigliedrigen Typen p, q und $p, xp + q$ in das Verzeichnis auf. Wir umgeben diese Typen mit Doppelrahmen, um anzudeuten, daß hier zum Aufbau der vollen Gruppe keine Klammeroperation notwendig ist.

Die neue Gruppentafel hat folgendes Aussehen:

1. $\boxed{\boxed{p,\ q}}$, 2. $\boxed{\boxed{p,\ xp+q}}$,

3. $\boxed{p,\ xp+(x+y)q}$, 4. $\boxed{p,\ \tfrac{1}{2}x^2p+xq}$,

5. $\boxed{p,\ \omega_*(x)q}$, ω_* die Grundlösung von $\omega^{(s+1)} = c_0\omega^{(s)} + \cdots + c_s\omega$,

6. $\boxed{p+q,\ y^2q}$, 7. $\boxed{p+q,\ (c+1)xp+(c-1)yq}$,

8. $\boxed{p+q+(x+y)(xp+yq),\ xp-yq}$, 9. $\boxed{p+q+xp+2yq,\ x^2p+y^2q}$,

10. $\boxed{p+q+\tfrac{1}{2}y^2q,\ xp+yq}$, 11. $\boxed{p+q+xp+2yq,\ xp+yq}$,

12. $\boxed{p+\dfrac{x^s}{s!}q,\ x(xp+syq)}$, 13. $\boxed{p+\dfrac{x^s}{s!}q,\ xp+\gamma yq}$ $(\gamma \neq s+1)$,

14. $\boxed{p,\ xp+(s+1)yq+\dfrac{x^{s+1}}{(s+1)!}q}$,

15. $\boxed{p+\omega^*(x)q,\ yq}$, ω^* die Grundlösung von $\omega^{(s+1)} = c_1\omega^{(s-1)} + \cdots + c_s\omega$,

16. $\boxed{p+\dfrac{1}{2}x^2p+xq,\ xp}$, 17. $\boxed{p+\dfrac{x^s}{s!}q+xp+(s+2)yq,\ xp+(s+1)yq}$,

18. $\boxed{p+\dfrac{x^s}{s!}q-\dfrac{1}{s+2}x(xp+syq),\ xp+(s+1)yq}$, 19. $\boxed{p+xq,\ yp}$,

20. $\boxed{p+xq-\tfrac{1}{3}yp,\ xp+2yq}$, 21. $\boxed{p+xq-\tfrac{1}{6}y(xp+yq),\ x(xp+yq)-yp}$.

In dieser Tabelle ist s stets eine positive ganze Zahl, kann also die Werte 1, 2, 3, ... annehmen.

Bei einigen der gewonnenen Gruppen hat die aktive Stammtransformation die Form p, so daß die Klammerung mit ihr nichts weiter ist als eine Differentiation nach x. In den andern Fällen ist sehr leicht die Variablenänderung zu erkennen, durch welche die aktive Stammtransformation auf die Form p gebracht werden kann. Z. B. genügt es bei den Gruppen 6. und 7.,

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y - x$$

als neue Veränderliche einzuführen. Man erhält dann

6*. $\boxed{\mathfrak{p},\ (\mathfrak{x}+\mathfrak{y})^2\mathfrak{q}}$, 7*. $\boxed{\mathfrak{p},\ (c+1)\mathfrak{x}\mathfrak{p}+(c-1)\mathfrak{y}\mathfrak{q}-2\mathfrak{x}\mathfrak{q}}$.

Bei den Gruppen 12. und 13. kommt man mit Hilfe der Variablenänderung

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = (s+1)!\, y - x^{s+1}$$

zu

$$12^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}(\mathfrak{x}\mathfrak{p} + s\mathfrak{y}\mathfrak{q}) - \mathfrak{x}^{s+2}\mathfrak{q}}\,,$$

$$13^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p} + \gamma\mathfrak{y}\mathfrak{q} + (\gamma - s - 1)\,\mathfrak{x}^{s+1}\mathfrak{q}} \quad (\gamma \neq s+1)\,,$$

bei 19. mit Hilfe von

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y - \frac{x^2}{2}$$

zu

$$19^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \left(\mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{x}^2}{2}\right)(\mathfrak{p} - \mathfrak{x}\mathfrak{q})}\,.$$

Bei 9. und 11. kommt man durch die Transformation

$$\mathfrak{x} = \ln(1+x), \quad y = \tfrac{1}{2}\ln(1+2y) - \ln(1+x)$$

zum Ziele und findet

$$9^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ (\mathfrak{p} - \mathfrak{q})\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\mathfrak{x}}{2} + \frac{1}{4}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{Sin}^2(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})}\,,$$

$$11^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ (\mathfrak{p} - \mathfrak{q})\,(1 - e^{-\mathfrak{x}}) + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{q}(1 - e^{-2\mathfrak{x}-2\mathfrak{y}})}\,.$$

Um bei Gruppe 8. die gewünschte Gestalt herzustellen, wird man die neuen Veränderlichen

$$\mathfrak{x} = \arctan\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \mathfrak{y} = \frac{x-y}{\sqrt{2 + (x+y)^2}}$$

einführen. Man erhält auf diese Weise

$$8^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}\mathfrak{y}\cos\mathfrak{x} + \mathfrak{q}(1 - \mathfrak{y}^2)\sin\mathfrak{x}}\,.$$

Bei Gruppe 10. kommt man mit Hilfe von

$$\mathfrak{x} = x\sqrt{2}, \quad \mathfrak{y} = 2\arctan\frac{y}{\sqrt{2}} - x\sqrt{2}$$

zu

$$10^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ (\mathfrak{p} - \mathfrak{q})\,\mathfrak{x} + \mathfrak{q}\sin(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})}\,.$$

Im Falle 15. setzt man

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y - \int \omega^* dx\,.$$

Dadurch bringt man 15. auf folgende Gestalt:

$$15^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \{\mathfrak{y} + \Omega^*(\mathfrak{x})\}\,\mathfrak{q}}\,.$$

Ω^* ist die Grundlösung von

$$\Omega^{(s+2)} = C_1\Omega^{(s)} + \cdots + C_s\Omega'\,.$$

Gruppe 16. wird durch die Transformation

$$\mathfrak{x} = \arctan\frac{x}{\sqrt{2}}, \qquad \mathfrak{y} = y - \ln\left(1 + \frac{1}{2}\,x^2\right)$$

in

$$16^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}\sin 2\mathfrak{x} - 2q(1-\cos 2\mathfrak{x})}$$

verwandelt. Bei Gruppe 17. erweisen sich die neuen Variablen

$$\mathfrak{x} = \ln(1+x), \qquad \mathfrak{y} = s!\,y(1+x)^{-s-2} - \int x^s(1+x)^{-s-3}\,dx$$

als hilfreich. Sie geben der Gruppe folgende Gestalt:

$$17^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}(1-e^{-\mathfrak{x}}) - q(1-e^{-\mathfrak{x}})^{s+1}e^{-2\mathfrak{x}} + q\{(s+2)e^{-\mathfrak{x}}-1\}\{\mathfrak{y} + \int (1-e^{-\mathfrak{x}})^s e^{-2\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}\}}.$$

Bei Gruppe 18. kommt man mit Hilfe der Transformation

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tan}\frac{x}{\sqrt{s+2}}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{s!}{(s+2)^{\frac{s+1}{2}}}\left\{y\left(1-\frac{x^2}{s+2}\right)^{-\frac{s}{2}} - \frac{1}{s!}\int x^s\left(1-\frac{x^2}{s+2}\right)^{-\frac{s}{2}-1}dx\right\}$$

zum Ziele und findet

$$18^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}\,\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{x} - q(\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{x})^{s+1}\,\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{x} + q(s\,\mathfrak{Cof}^2\,\mathfrak{x}+1)\,(\mathfrak{y} + \int(\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{x})^s\,d\mathfrak{x})}.$$

Gruppe 20. erhält unter Einwirkung der Transformation

$$\mathfrak{x} = \arctan\frac{x\sqrt{3}}{3-y}, \quad \mathfrak{y} = \{3x^2 + (3-y)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

folgende Gestalt:

$$20^*. \quad \boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}(6\mathfrak{y} - \cos\mathfrak{x})\sin\mathfrak{x} + q\,\{6\mathfrak{y}^2\cos\mathfrak{x} - \mathfrak{y}\,(1+\cos^2\mathfrak{x})\}}.$$

Es bleibt jetzt nur noch die Gruppe 21. übrig. Führt man $6^{-\frac{1}{3}}x$ und $6^{-\frac{2}{3}}y$ als neue Veränderliche ein, so verwandelt sich die aktive Transformation in

$$p + xq - y\,(xp + yq),$$

die passive in $x(xp+yq) - yp$. In homogener Schreibung lauten sie

$$x_3p_1 + x_1p_2 + x_2p_3, \quad -x_2p_1 - x_1p_3\,.$$

Das Fixpunktdreieck der aktiven Transformation hat die Seiten

$$\mathfrak{x}_\nu = \alpha_\nu x_1 + \alpha_\nu^2 x_2 + x_3 = 0\,,$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die dritten Einheitswurzeln sind. Durch Einführung der $\mathfrak{x}_\nu$ verwandelt sich die aktive Transformation in

$$X_I f = \alpha_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{x}_3\mathfrak{p}_3\,,$$

die passive, abgesehen von einem Faktor, in

$$X_{II}f = \bar\alpha_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_1 + \bar\alpha_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{p}_2 + \bar\alpha_3\mathfrak{x}_3\mathfrak{p}_3 - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_3)(\bar\alpha_1\mathfrak{p}_1 + \bar\alpha_2\mathfrak{p}_2 + \bar\alpha_3\mathfrak{p}_3).$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind gleich

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\,,$$

$\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \bar\alpha_3$ die konjugierten Werte. Man kann die aktive Transformation als „Gewichtsspenderin" im Sinne meiner Gewichtsrechnung betrachten. Klammert man mit ihr, so multipliziert sich jedes $\mathfrak{x}_\varrho\,\mathfrak{p}_\sigma$ mit seinem Gewichtsfaktor $\alpha_\varrho - \alpha_\sigma$. Diese Gewichtsfaktoren kann man in der Zahlenebene durch Punkte versinnlichen. Drei Bestandteile $\mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{x}_2\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{x}_3\mathfrak{p}_3$ haben das Gewicht 0, die sechs übrigen lauter verschiedene Gewichte, deren Bildpunkte ein reguläres Sechseck darstellen. Durch sechsmaliges Klammern mit der Gewichtsspenderin ergeben sich aus $X_{II}f$ so viele Transformationen, daß man alle $\mathfrak{x}_\varrho\mathfrak{p}_\sigma$ mit

ungleichen ϱ, σ und $\bar{\alpha}_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{p}_1 + \bar{\alpha}_2 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{p}_2 + \bar{\alpha}_3 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{p}_3$ aus $X_{II}f$ und den sechs Klammerungen mit X_If aufbauen kann. Es bestätigt sich hiermit nochmals das Strukturgesetz X_If, $X_{II}f$, (X_IX_{II}), $(X_I(X_IX_{II}))$, ... Auch tritt die „Gewichtsfigur" der projektiven Gruppe (reguläres Sechseck mit doppelt zählendem Mittelpunkt) sehr schön hervor. Ähnlich kann man bei allen Gruppen verfahren, die projektive Gestaltung zulassen. Doch wollen wir hier nicht näher auf diesen Punkt eingehen, vielmehr danach trachten, die aktive Transformation auf die Form p zu bringen. Hierzu genügt die Einführung der Veränderlichen

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\ln(\mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\ln(\mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_1)}{\alpha_3 - \alpha_1}\right\},$$

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{\ln(\mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\ln(\mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_1)}{\alpha_3 - \alpha_1}\right\}.$$

Sie verwandeln X_If in $\mathfrak{p}$ und $X_{II}f$ zunächst in

$$\frac{\mathfrak{p} - i\mathfrak{q}}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}\left\{\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 - \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3}{3}\left(\frac{\bar{\alpha}_2}{\mathfrak{x}_2} - \frac{\bar{\alpha}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\mathfrak{p} + i\mathfrak{q}}{2(\alpha_3 - \alpha_1)}\left\{\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_1 - \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3}{3}\left(\frac{\bar{\alpha}_3}{\mathfrak{x}_3} - \frac{\bar{\alpha}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)\right\},$$

wo nun noch einzusetzen ist

$$\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1} = e^{(\alpha_2 - \alpha_1)(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})}, \quad \frac{\mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_1} = e^{(\alpha_3 - \alpha_1)(\mathfrak{x} - i\mathfrak{y})}.$$

Führt man die Abkürzungen

$$\frac{3}{2}\mathfrak{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{y} = \varkappa, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{x} - \frac{3}{2}\mathfrak{y} = \lambda$$

ein, so ergibt sich folgende Fassung der Gruppe 21:

21*. $\boxed{\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}\sin 2\lambda + \mathfrak{q}\cos 2\lambda + e^{\varkappa}(\mathfrak{p}\sin\lambda + \mathfrak{q}\cos\lambda) + e^{-\varkappa}\cos\lambda(\mathfrak{p}\sqrt{3} + \mathfrak{q}) - (\mathfrak{p}\sqrt{3} + 3\mathfrak{q})}$.

Eine andere Fassung der Gruppentafel.

Wenn man die aktive Transformation auf die Form p gebracht hat, so kann man das Verzeichnis der elementtransitiven ebenen Transformationsgruppen dadurch abkürzen, daß man nur die passive Transformation angibt, in der man noch ein etwaiges Glied von der Gestalt cp fortlassen darf.

Die passive Transformation hat in allen Fällen folgendes Aussehen:

$$Wf = \varphi_1(x)\, W_1f + \cdots + \varphi_n(x)\, W_nf,$$

wobei $W_1f, \ldots, W_nf$ linear unabhängige Symbole von der Form

$$\xi(y)\, p + \eta(y)\, q$$

sind. Auch $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sind linear unabhängig, weil sonst eine Herabdrückung der Zahl n möglich wäre.

Ist die Gruppe r-gliedrig, so lauten ihre infinitesimalen Transformationen

$$p,\ Wf,\ (Wf)', \ldots, (Wf)^{(r-2)}.$$

Die Striche bedeuten Differentiationen nach x. Es ist also

$$(Wf)' = \varphi_1'(x)\, W_1f + \cdots + \varphi_n'(x)\, W_nf,$$
$$(Wf)'' = \varphi_1''(x)\, W_1f + \cdots + \varphi_n''(x)\, W_nf$$

usw.

Es ergibt sich hier eine Einteilung aller elementtransitiven Gruppen der Ebene in zwei Klassen. Bei den Gruppen der ersten Klasse sind die Symbole $p, W_1 f, \ldots, W_n f$ linear unabhängig, bei denen der zweiten Klasse besteht eine Beziehung von der Form

$$p = k_1 W_1 f + \cdots + k_n W_n f .$$

Man kann, wenn eine solche Beziehung vorhanden ist, $W_1 f$ mit p identifizieren und die passive Transformation in folgender Weise schreiben:

$$Wf = \varphi_1(x)\, p + \varphi_2(x)\, W_2 f + \cdots + \varphi_n(x)\, W_n f .$$

$\varphi_1(x)$ ist hierbei keine Konstante, weil wir sonst das Glied $\varphi_1(x)p$ fortlassen dürften, wodurch die Zahl der Bausteine von Wf unter n herabsänke.

Bei einer r-gliedrigen Gruppe der ersten Klasse erfüllen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ eine Differentialgleichung von der Form

$$\varphi^{(r-1)} = c_1 \varphi^{(r-2)} + \cdots + c_{r-1} \varphi ,$$

aber keine gleichartige Differentialgleichung von geringerer Ordnung. Bei einer r-gliedrigen Gruppe der zweiten Klasse ist

$$\varphi_1^{(r-1)} = c_1 \varphi_1^{(r-2)} + \cdots + c_{r-1} \varphi_1 + c ,$$

während $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ dieselbe Differentialgleichung ohne c erfüllen. Eine Herabdrückung der Ordnung ist auch hier unmöglich.

Gruppen der ersten Klasse.

(Die aktive Transformation p tritt nicht als Baustein der passiven auf.)

(2) $\boxed{q}$;

(3) $\boxed{x(p+q)+yq}$, $\boxed{x\{(c+1)p-2q\}+(c-1)yq}$, $\boxed{\cos x \cdot yp + \sin x \cdot (1-y^2)q}$;

(4) $\boxed{x^2 q + 2xyq + y^2 q}$;

(5) $\boxed{x(p-q) + \cos x \cdot q \sin y + \sin x \cdot q \cos y}$;

(8)
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos x\sqrt{3} \cdot (-p \sin 3y + q \cos 3y) + \sin x\sqrt{3} \cdot (p \cos 3y + q \sin 3y) \\ + e^x \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-p \sin \frac{3y}{2} + q \cos \frac{3y}{2}\right) + e^x \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \left(p \cos \frac{3y}{2} + q \sin \frac{3y}{2}\right) \\ + e^{-x} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot (p\sqrt{3} + q) \cos \frac{3y}{2} + e^{-x} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot (p\sqrt{3} + q) \sin \frac{3y}{2} - 3q \end{array}} ;$$

$(s+2)$ $\boxed{\omega^*(x)\, q}$

(ω^* die Grundlösung von $\omega_{s+1} = c_0 \omega_s + \cdots + c_s \omega$) ;

$(s+3)$ $\boxed{\Omega^*(x)\, q + yq}$

(Ω^* die Grundlösung von $\Omega_{s+2} = C_1 \Omega_s + \cdots + C_s \Omega_1$)

Links ist in Klammern stets die Gliederzahl vermerkt. Es fallen, wie man sieht, in die erste Klasse eine zweigliedrige, drei dreigliedrige, eine viergliedrige, eine fünfgliedrige, eine achtgliedrige Gruppe. Dann kommen noch zwei Typen, deren Gliederzahl $s+2$ bzw. $s+3$ lautet, wobei $s > 0$ ist.

Achtet man auf die Anzahl der Bausteine, so gibt es, wie das obige Verzeichnis erkennen läßt, zunächst Gruppen, deren passive Transformation nur *einen* Baustein aufweist, nämlich

$\boxed{q}$, $\boxed{x(p-q)}$, $\boxed{\omega^*(x)\, q}$.

$x(p-q)$ ist ein Sonderfall von $x\{(c+1)p-2q\}+(c-1)yq$. Dann kommen Gruppen mit *zwei* Bausteinen in der passiven Transformation:

$$\boxed{x(p+q)+yq}\,,\quad \boxed{x\{(c+1)\,p-2q\}+(c-1)\,yq}\,,\quad \boxed{\cos x\cdot yp+\sin x\cdot(1-y^2)q}\,,$$

$$\boxed{\Omega^*(x)\,q+yq}\,.$$

Bei zwei Gruppen hat die passive Transformation *drei* Bausteine, nämlich bei

$$\boxed{x^2q+2xyq+y^2q}\,,\qquad \boxed{x(p-q)+\cos x\cdot q\sin y+\sin x\cdot q\cos y}\,.$$

Bei der achtgliedrigen Gruppe, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe ähnlich ist, sehen wir *sieben* Bausteine.

Gruppen der zweiten Klasse.

(Die aktive Transformation p ist ein Baustein der passiven.)

(2) $$\boxed{xp+q};$$

(3) $$\boxed{\tfrac{1}{2}x^2p+xq};$$

(4) $$\boxed{e^{-x}p+(\tfrac{1}{2}-e^{-x})\,q+\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cdot qe^{-2y}}\,,\qquad \boxed{\sin 2x\cdot p-2(1-\cos 2x)\,q};$$

(5) $$\boxed{\tfrac{1}{2}x^2p+yp-xyq-\tfrac{1}{2}x^3q};$$

(6) $$\begin{cases}\boxed{\sin x\cos x\cdot p-6\sin x\cdot yp-6\cos x\cdot y^2q+(1+\cos^2x)\,yq}\,,\\ \boxed{\mathfrak{Cof}\,x\cdot p+(\tfrac{3}{4}-\mathfrak{Cof}\,x)\,q+\tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Cof}\,2x\cdot q\,\mathfrak{Cof}\,2y+\tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Sin}\,2x\cdot q\,\mathfrak{Sin}\,2y};\end{cases}$$

$(s+3)$ $$\boxed{xp+\gamma yq+(\gamma-s-1)\,x^{s+1}q}\,,\qquad \boxed{xp+(s+1)\,yq+x^{s+1}q};$$

$(s+4)$ $$\begin{cases}\boxed{x^2p+sxyq-x^{s+2}q}\,,\\ \boxed{(e^{-x}p+\{1-(s+2)\,e^{-x}\}\,yq+\{(1-e^{-x})^{s+1}e^{-2x}+[1-(s+2)\,e^{-x}]\int(1-e^{-x})^s e^{-2x}\,dx\}\,q};\end{cases}$$

$(s+5)$ $$\boxed{\mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cof}\,x\cdot p+(1+s\,\mathfrak{Cof}^2x)\,yq+\{(1+s\,\mathfrak{Cof}^2x)\int\mathfrak{Sin}^s x\,dx-\mathfrak{Sin}^{s+1}x\,\mathfrak{Cof}\,x\}q}\,.$$

Achtet man auf die Anzahl der Bausteine, so gibt es nur bei *drei* Gruppen der zweiten Klasse vier Bausteine. In allen andern Fällen sind es weniger als vier, und zwar zwei oder drei.

Hiermit ist eine bemerkenswerte Eigenschaft der allgemeinen projektiven Gruppe aufgedeckt, die keine elementtransitive Gruppe der Ebene mit ihr teilt. Die Zahl der Bausteine in der passiven Transformation ist bei dieser Gruppe gleich 7, bei jeder anderen höchstens gleich 4. Die passive Transformation weist also im Falle der projektiven Gruppe eine besonders reiche Gliederung auf. Vorausgesetzt wird, daß man die aktive Transformation auf die Form p gebracht hat.

Eingegangen 30. März 1939.

Die Bewegungsgruppe einer ebenen Cayleyschen Geometrie.

Von *Friedrich Bachmann* in Marburg (Lahn).

Bei der algebraischen Untersuchung der absoluten Geometrie [1]) muß man in einer beliebigen projektiven Ebene die Gruppe der projektiven Transformationen betrachten, die eine durch eine quadratische Form vermittelte Polarität invariant lassen. Eine ebene projektive Geometrie, in der eine solche Polarität gegeben ist, bezeichnen wir als eine *ebene Cayleysche Geometrie*, und wir wollen also die Bewegungsgruppe einer solchen Geometrie untersuchen. Für die gewöhnliche ebene elliptische Geometrie, die ein Spezialfall der allgemeinen ebenen Cayleyschen Geometrie ist, ist seit langem bekannt [2]), daß die Bewegungsgruppe durch die multiplikative Gruppe der reellen Quaternionen dargestellt werden kann. Sei nun eine beliebige ebene Cayleysche Geometrie gegeben und K der Körper der Geometrie; die quadratische Form kann in der Gestalt

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 , \qquad a_1 a_2 \neq 0$$

angenommen werden. Es soll dann gezeigt werden, daß die Bewegungsgruppe der Geometrie durch die multiplikative Gruppe der Quaternionen nicht verschwindender Norm aus dem Quaternionensystem $(-a_1, -a_2)$ über K [3]) dargestellt werden kann. Durch Erweiterung der ebenen zu einer räumlichen Cayleyschen Geometrie erkennt man zunächst analog wie in dem Fall der gewöhnlichen elliptischen Geometrie, daß die mit Hilfe von Quaternionen aus dem genannten System in der Gestalt

$$\varrho x' = a x \bar{a} \quad \text{mit} \quad Na \neq 0$$

darstellbaren Transformationen Bewegungen der ebenen Cayleyschen Geometrie sind. Wir bezeichnen die involutorischen unter diesen Transformationen als Spiegelungen; der Nachweis, daß es außer den so darstellbaren keine weiteren Bewegungen gibt, wird dann mit Hilfe des Satzes erbracht, daß zwei ineinander bewegliche Punkte bereits durch eine Spiegelung ineinander übergeführt werden können. Es ergibt sich, daß die Bewegungsgruppe sich durch die Spiegelungen erzeugen läßt; die Relationen zwischen diesen Erzeugenden lassen sich auf Relationen von drei verschiedenen Typen zurückführen. Der zu Hilfe genommene Cayleysche Raum ist der zu der ebenen Cayleyschen Geometrie gehörige *kinematische Raum* [4]), dessen Punkte (mit Ausnahme derer, in denen die Normenform verschwindet) als die Bewegungen der Ebene gedeutet werden können.

[1]) Siehe F. Bachmann, Eine Begründung der absoluten Geometrie in der Ebene, Math. Ann. **113** (1937), S. 424—451, und F. Bachmann und K. Reidemeister, Die metrische Form in der absoluten und in der elliptischen Geometrie, ebd., S. 748—765.

[2]) S. z. B. F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Berlin 1928, S. 238.

[3]) L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich und Leipzig 1927, S. 45.

[4]) S. die erste in Anm. [1]) zitierte Arbeit und E. Podehl und K. Reidemeister, Eine Begründung der elliptischen Geometrie, Hamb. Abh. **10** (1934), S. 231—255. Vgl. auch W. Blaschke, Ebene Kinematik, Leipzig-Berlin 1938, (Hamb. Math. Einzelschr. 25), und die dort angegebene Literatur.

1. *Ebene Cayleysche Geometrie.* Von einer projektiven Geometrie setzen wir im folgenden stets voraus, daß in ihr der Satz von Pascal gilt und daß die Nebenecken eines vollständigen Vierecks nicht in einer Geraden liegen; algebraisch betrachtet sind dies die Geometrien über den Körpern, deren Charakteristik ungleich 2 ist. Dementsprechend wird nur von Körpern mit einer Charakteristik ungleich 2 die Rede sein; wir werden diese Körper schlechthin als Körper bezeichnen. Es sei nun eine ebene Cayleysche Geometrie, also eine ebene projektive Geometrie und in ihr eine Polarität gegeben; wir setzen dabei voraus, daß die Polarität durch eine nicht singuläre ternäre quadratische Form

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i x_k , \qquad a_{ik} = a_{ki} \tag{1}$$

vermittelt wird. Unter einer *Bewegung* der ebenen Cayleyschen Geometrie verstehen wir eine projektive Transformation [5]), bei der die Polarität erhalten bleibt. Die Bewegungen bilden eine Gruppe. Wird eine Bewegung durch eine Matrix (c_{ik}) $(i, k = 1, 2, 3)$ dargestellt, so muß (c_{ik}) die Form $A(x, x)$ in eine Form $\lambda A(x, x)$ mit $\lambda \neq 0$ überführen; es ist dabei

$$||c_{ik}||^2 = \lambda^3 . \text{ [6])} \tag{2}$$

Der Körper einer ebenen Cayleyschen Geometrie ist nur bis auf Isomorphie festgelegt; wir denken ihn in einer bestimmten Weise gewählt. Die metrische Form ist dann in dem Körper nur bis auf Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Faktor und bis auf eine beliebige halblineare Transformation bestimmt. Wir können daher die Form durch Multiplikation mit einem Faktor so normieren, daß ihre Diskriminante [7]) eine Quadratzahl oder gleich 1 wird, und sie dann durch eine lineare Transformation in die Diagonalgestalt

$$Q(x, x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 , \qquad a_1 a_2 \neq 0 \tag{3}$$

bringen. Die Matrizen, die die Bewegungen darstellen, lassen sich nun durch *verallgemeinerte Orthogonalitätsbedingungen* kennzeichnen: Die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{3} a_i c_{ik} c_{il} = \sqrt[3]{c^2}\, a_k \delta_{kl} , \qquad k, l = 1, 2, 3;\ a_3 = a_1 a_2 \tag{4}$$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Matrix (c_{ik}) mit $||c_{ik}|| = c \neq 0$ die Form $Q(x, x)$ bis auf einen Faktor λ in sich überführt; es ist dann $\lambda = \sqrt[3]{c^2}$.

Für die geometrischen Eigenschaften einer ebenen Cayleyschen Geometrie ist es von Wichtigkeit, ob die quadratische Form der Geometrie die Null (in nicht trivialer Weise) darstellt oder nicht. Es gilt der

---

[5]) Kollineationen, die die Polarität erhalten, rechnen wir mit Rücksicht auf die geometrischen Anwendungen, die von der vorliegenden Arbeit gemacht werden sollen, nicht zu den Bewegungen, wenn sie durch halblineare Transformationen (s. B. L. v. d. Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Erg. d. Math. **4**, 2, Berlin 1935, S. 4) $\varrho x_i' = \sum c_{ik} J(x_k)$ dargestellt werden, wo $z' = J(z)$ ein von der Identität verschiedener Automorphismus des Körpers der Geometrie ist.

[6]) Hieraus folgt, daß in dem Körper K der Geometrie eine Zahl γ existiert, für die $\lambda = \gamma^2$ und $||c_{ik}|| = \gamma^3$ ist. Daher ist die Bewegungsgruppe isomorph zu der zu $A(x, x)$ gehörigen „*engeren orthogonalen Gruppe*“ $O(3, K, A)$ (s. v. d. Waerden, a. a. O. [5]), S. 14), d. h. zu der Gruppe der linearen Transformationen, die die Form $A(x, x)$ in sich überführen und deren Determinante 1 ist; denn wenn eine Bewegung durch die Matrix (c_{ik}) dargestellt wird, so auch durch die zu $O(3, K, A)$ gehörige Matrix $\left(\frac{c_{ik}}{\gamma}\right)$.

[7]) Über quadratische Formen in beliebigen Körpern und die Zuordnung gewisser hyperkomplexer Systeme vgl. E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, J. reine angew. Math. **176** (1937), S. 31—44.

Hilfssatz. [8]) *Über einem beliebigen Körper K sind alle ternären quadratischen Formen mit quadratischer Diskriminante, die die Null darstellen, äquivalent zu der Form*

$$Q_0(x, x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 ;$$

die Formen stellen alle Zahlen aus K dar.

Hieraus folgt:

Satz 1. *In jeder projektiven Ebene gibt es eine und (bis auf eine projektive Transformation) nur eine Polarität, die durch eine quadratische Form vermittelt wird, die die Null darstellt; als die definierende Form kann die Form $Q_0(x, x)$ gewählt werden.*

2. *Quaternionen und quadratische Formen.* Sind a_1, a_2 zwei von Null verschiedene Elemente eines Körpers K, so versteht man [3]) unter dem Quaternionensystem $(-a_1, -a_2)$ das hyperkomplexe System der Elemente

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_1 i_2 \tag{1}$$

mit α_k in K $(k = 0, 1, 2, 3)$ und der Multiplikationstafel

$$i_1^2 = -a_1 , \quad i_2^2 = -a_2 , \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1 . \tag{2}$$

Ist

$$b = \beta_0 + \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2 + \beta_3 i_1 i_2, \quad c = \gamma_0 + \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_1 i_2 \quad \text{und} \quad c = ab ,$$

so gilt demnach

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_0\beta_0 - a_1\alpha_1\beta_1 - a_2\alpha_2\beta_2 - a_1a_2\alpha_3\beta_3 \\ \gamma_1 &= \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + a_2\alpha_2\beta_3 - a_2\alpha_3\beta_2 \\ \gamma_2 &= \alpha_0\beta_2 - a_1\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + a_1\alpha_3\beta_1 \\ \gamma_3 &= \alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0 . \end{aligned} \tag{3}$$

Unter dem Konjugierten des Quaternions a wird das Quaternion

$$\bar{a} = \alpha_0 - \alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2 - \alpha_3 i_1 i_2 \tag{4}$$

und unter der Norm des Quaternions a wird das Element

$$Na = a\bar{a} = \alpha_0^2 + a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + a_1a_2\alpha_3^2 \tag{5}$$

aus K verstanden; für die Norm gilt die Regel

$$Nab = Na\, Nb . \tag{6}$$

Falls das Quaternion a ein Inverses besitzt, so muß nach (3)

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{Na} \tag{7}$$

sein. Die Algebra $(-a_1, -a_2)$ ist daher dann und nur dann ein Schiefkörper, wenn die Normenform

$$N(x, x) = x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 \tag{8}$$

in K die Null nicht darstellt.

Wir ordnen nun jeder ternären Diagonalform mit quadratischer Diskriminante, d. h. jeder Form **1**, (3) in einem Körper K das Quaternionensystem $(-a_1, -a_2)$ über K zu. Wir setzen

$$i_3 = i_1 i_2;$$

es gelten dann für i_3 die Rechenregeln

$$i_3^2 = -a_1 a_2, \quad i_1 i_3 = -i_3 i_1, \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 .$$

Wir können die Rechenvorschrift für das der Form **1**, (3) zugeordnete Quaternionen-

[8]) Ergibt sich aus üblichen Schlüssen der projektiven Geometrie; vgl. aber auch Anm. [7]).

system in der Gestalt

$$\left(\sum_{k=1}^{3} i_k x_k\right)^2 = -\sum_{k=1}^{3} a_k x_k^2 \tag{9}$$

schreiben, wenn wieder $a_3 = a_1 a_2$ ist. Ist nun

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_1 b_2 y_3^2 \tag{10}$$

eine zu der gegebenen Form **1**, (3) äquivalente Diagonalform und ist

$$x_k = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} y_l\,, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{11}$$

die Transformation, die den Übergang von **1**, (3) zu (10) vermittelt, so wird die Rechenvorschrift

$$\left(\sum_{l=1}^{3} j_l y_l\right)^2 = -\sum_{l=1}^{3} b_l y_l^2\,, \qquad b_3 = b_1 b_2\,, \tag{12}$$

die für das der transformierten Form zugeordnete Quaternionensystem gelten muß, von den Einheiten

$$j_l = \sum_{k=1}^{3} i_k c_{kl}\,, \qquad l = 1, 2, 3 \tag{13}$$

erfüllt. Denn es ist

$$\begin{aligned} (\Sigma j_l y_l)^2 &= (\Sigma i_k x_k)^2\,, && \text{da nach (11) und (13) } \Sigma j_l y_l = \Sigma i_k x_k \text{ gilt,} \\ &= -\Sigma a_k x_k^2\,, && \text{nach (9),} \\ &= -\Sigma b_l y_l^2\,, && \text{da } \mathbf{1}, (3) \text{ und (10) äquivalent sind.} \end{aligned}$$

Die Einheiten j_1, j_2, j_3 erzeugen dasselbe hyperkomplexe System wie die Einheiten i_1, i_2, i_3, und wir haben damit das Ergebnis erhalten, daß unsere Vorschrift, die jeder ternären Diagonalform mit quadratischer Diskriminante ein Quaternionensystem zuordnet, äquivalenten Diagonalformen dasselbe Quaternionensystem zuordnet. Ganz entsprechend erkennt man, daß zwei Diagonalformen in K äquivalent sind, wenn ihnen durch diese Vorschrift dasselbe Quaternionensystem zugeordnet wird. Die Klassen äquivalenter ternärer quadratischer Formen mit quadratischer Diskriminante entsprechen also den verschiedenen Quaternionensystemen. Über einem festen Körper entspricht der Formenklasse, deren Elemente die Null darstellen, das zerfallende System $(-1, 1)$, da diese Formenklasse durch die Form $Q_0(x, x)$ repräsentiert wird, und jeder anderen Formenklasse ein Quaternionensystem, das ein Schiefkörper ist; denn wenn die ternäre Diagonalform $Q(x, x)$ die Null nicht darstellt, so stellt auch die Form $x_0^2 + Q(x, x)$, die Normenform des zugehörigen Quaternionensystems, die Null nicht dar [9]). Ist schließlich eine Diagonalform gegeben, die durch Anwendung eines Automorphismus $z' = J(z)$ des Körpers K aus einer Diagonalform **1**, (3) hervorgeht, so entspricht dieser Form nach unserer Vorschrift das Quaternionensystem $(-J(a_1), -J(a_2))$, das zu dem System $(-a_1, -a_2)$ isomorph ist. Wir erhalten somit

Satz 2. *Ordnet man jeder ternären Diagonalform mit quadratischer Diskriminante*

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2\,, \qquad a_1 a_2 \neq 0$$

über einem Körper K das Quaternionensystem $(-a_1, -a_2)$ über K zu, so wird damit jeder ebenen Cayleyschen Geometrie eine Klasse isomorpher Quaternionensysteme zugeordnet. Den ebenen Cayleyschen Geometrien, deren Form die Null darstellt, entsprechen dabei die

[9]) H. Hasse, Elementarer Beweis des Hauptsatzes über ternäre quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten, J. reine angew. Math. **172** (1935), S. 129—132, Hilfssatz 2.

zerfallenden Quaternionensysteme und denen, deren Form die Null nicht darstellt, Quaternionensysteme, die Schiefkörper sind.

3. *Normaler Cayleyscher Raum.* Unter einer *räumlichen Cayleyschen Geometrie* verstehen wir eine dreidimensionale projektive Geometrie, in der eine Polarität gegeben ist; die Polarität werde durch eine nicht singuläre quaternäre quadratische Form

$$A(x, x) = \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik} x_i x_k , \qquad a_{ik} = a_{ki} \tag{1}$$

vermittelt. Wir betrachten wieder die projektiven Transformationen, bei denen die Polarität erhalten bleibt. Wird eine solche Transformation durch eine Matrix (c_{ik}) $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ dargestellt, und führt (c_{ik}) die Form $A(x, x)$ in die Form $\lambda A(x, x)$ über, so ist

$$||c_{ik}||^2 = \lambda^4 . \tag{2}$$

Als *Bewegungen* der räumlichen Cayleyschen Geometrie bezeichnen wir von diesen projektiven Transformationen nur diejenigen, für deren Matrizen

$$||c_{ik}|| = \lambda^2 \tag{3}$$

ist. Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Die quadratische Form einer räumlichen Cayleyschen Geometrie über dem Körper K ist wiederum nur bis auf Multiplikation mit einem Faktor und bis auf eine beliebige halblineare Transformation bestimmt. Wir nennen nun eine räumliche Cayleysche Geometrie über K *normal*, wenn die Diskriminante der sie definierenden Form ein Quadrat ist. Diese Eigenschaft ist hier im Gegensatz zum ternären Fall eine Eigenschaft der Geometrie. Jede normale Geometrie läßt sich insbesondere durch die Normenform eines Quaternionensystems über K, also durch eine Form

$$N(x, x) = x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 , \qquad a_1 a_2 \neq 0 \tag{4}$$

definieren. Denn die definierende Form kann zunächst auf Diagonalgestalt gebracht werden; sodann erhält man, indem man durch den Koeffizienten von x_0^2 dividiert, eine Form $x_0^2 + T(x, x)$, wo $T(x, x)$ eine ternäre Form in x_1, x_2, x_3 mit quadratischer Diskriminante ist und also in der Gestalt **1**, (3) geschrieben werden kann. Über dem Körper der reellen Zahlen ist z. B. die räumliche hyperbolische Geometrie nicht normal, wohl aber die elliptische und die mit einer ringartigen Fläche als absolutem Gebilde. Die Matrizen (c_{ik}), die die Bewegungen einer normalen Geometrie mit der Form (4) darstellen, sind durch die *verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen*

$$\sum_{i=0}^{3} a_i c_{ik} c_{il} = \sqrt{c}\, a_k \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, 2, 3;\ a_0 = 1,\ a_3 = a_1 a_2 \tag{5}$$

charakterisiert, wo $||c_{ik}|| = c \neq 0$ ist.

4. *Links- und Rechtsschiebungen in einem normalen Cayleyschen Raum.* Es läßt sich nun unmittelbar bestätigen, daß die Matrizen

$$(1\text{a}) \begin{pmatrix} \alpha_0 & -a_1\alpha_1 & -a_2\alpha_2 & -a_1a_2\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & -a_2\alpha_3 & a_2\alpha_2 \\ \alpha_2 & a_1\alpha_3 & \alpha_0 & -a_1\alpha_1 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}, \qquad (1\text{b}) \begin{pmatrix} \beta_0 & -a_1\beta_1 & -a_2\beta_2 & -a_1a_2\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & a_2\beta_3 & -a_2\beta_2 \\ \beta_2 & -a_1\beta_3 & \beta_0 & a_1\beta_1 \\ \beta_3 & \beta_2 & -\beta_1 & \beta_0 \end{pmatrix}$$

die verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen **3**, (5) erfüllen, wenn ihre Determinanten

$$(2\text{a}) \quad (\alpha_0^2 + a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + a_1a_2\alpha_3^2)^2, \qquad (2\text{b}) \quad (\beta_0^2 + a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2 + a_1a_2\beta_3^2)^2$$

von Null verschieden sind. Ordnet man jeder Matrix (1a) das Quaternion

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_1 i_2$$

aus dem Quaternionensystem $(-a_1, -a_2)$ und jeder Matrix (1b) das Quaternion

$$b = \beta_0 + \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2 + \beta_3 i_1 i_2,$$

ferner jedem Punkt $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ unseres Raumes das Quaternion

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_1 i_2$$

zu, so läßt sich die Anwendung einer Bewegung, die durch eine der Matrizen (1a) oder (1b) dargestellt wird, durch die Quaternionengleichung

(3a) $\varrho x' = ax$ mit $Na \neq 0$, (3b) $\varrho x' = xb$ mit $Nb \neq 0$

beschreiben. Dementsprechend bezeichnen wir die Bewegungen als *Links-* und *Rechtsschiebungen*. Da die Zusammensetzung der Matrizen (1a) der Links-Multiplikation und die Zusammensetzung der Matrizen (1b) der Rechts-Multiplikation der zugeordneten Quaternionen entspricht, ergibt sich, daß die Links- und Rechtsschiebungen je eine Gruppe bilden. Diese Gruppen sind isomorph zu der Faktorgruppe

$$\mathfrak{M}((-a_1, -a_2), K)/\mathfrak{M}(K),$$

wo $\mathfrak{M}((-a_1, -a_2), K)$ die multiplikative Gruppe der Quaternionen mit nicht verschwindender Norm aus dem System $(-a_1, -a_2)$ über K und $\mathfrak{M}(K)$ die multiplikative Gruppe des Körpers K ist. Ferner sind die Gruppen einfach transitiv; sie enthalten genau eine Bewegung, die einen Punkt des Raumes, in dem die Form $N(x, x)$ nicht verschwindet, in einen beliebigen anderen Punkt des Raumes überführt, in dem die Form nicht verschwindet.

Es müssen nun auch beliebige Produkte von Links- und Rechtsschiebungen Bewegungen sein. Eine Transformation, die durch Zusammensetzung einer Linksschiebung mit einer Rechtsschiebung entsteht, kann in der Gestalt

(4) $$\varrho x' = axb \quad \text{mit } Nab \neq 0$$

geschrieben werden. Diese Schreibweise zeigt, daß eine Links- und eine Rechtsschiebung stets vertauschbar sind, daß daher die Transformationen (4) bereits alle durch Zusammensetzung von Links- und Rechtsschiebungen entstehenden Bewegungen darstellen und daß die Gruppe dieser Bewegungen zu dem direkten Produkt zweier zu der Gruppe $\mathfrak{M}((-a_1, -a_2), K)/\mathfrak{M}(K)$ isomorphen Gruppen isomorph ist.

5. *Die durch Links- und Rechtsschiebungen induzierten Bewegungen der Ebene.* Ein normaler Cayleyscher Raum enthält als $x_0 = 0$ eine Ebene, in der eine ebene Cayleysche Geometrie mit der Form **1**, (3) gilt, und wir fragen nun nach den räumlichen Bewegungen der Gestalt **4**, (4), die die Ebene $x_0 = 0$ in sich überführen. Diese Bewegungen sind diejenigen, die den Punkt (1, 0, 0, 0), den Pol der Ebene $x_0 = 0$, fest lassen; es sind also die, für die ab in K liegt, also die Bewegungen

(1) $$\varrho x' = ax\bar{a} \quad \text{mit} \quad Na \neq 0.$$

Diese Gruppe ist wieder zu der Gruppe $\mathfrak{M}((-a_1, -a_2), K)/\mathfrak{M}(K)$ isomorph.

Eine Bewegung (1) ist dann und nur dann involutorisch, wenn das Quadrat des sie darstellenden Quaternions in K liegt, und a^2 liegt, wie aus **2**, (3) unmittelbar folgt, in K

1) wenn bereits a in K liegt

— die diesen Quaternionen zugeordnete Bewegung ist die Identität — und

2) wenn $\alpha_0 = 0$ ist.

Die involutorischen Bewegungen besitzen nun charakteristische Fixelemente. Allgemein folgt aus (1), daß ein Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ dann und nur dann Fixpunkt der durch a gegebenen Bewegung ist, wenn ax zu xa proportional ist. Zwischen zwei Quaternionen a und b besteht nun, wie aus **2**, (3) folgt, dann und nur dann eine Gleichung

$$ab = \sigma ba \quad \text{mit } \sigma \text{ in } K,$$

wenn entweder

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

ist (dann ist $\sigma = 1$) oder wenn

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_1\alpha_1\beta_1 + a_2\alpha_2\beta_2 + a_1a_2\alpha_3\beta_3 = Q(a, b) = 0$$

ist (dann ist $\sigma = -1$). Daher gilt: Ein Fixpunkt der durch das Quaternion

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_1 i_2 \quad \text{mit} \quad Na \neq 0 \tag{2}$$

(a nicht in K) gegebenen Bewegung ist in jedem Falle der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; wir bezeichnen daher die durch a gegebene Bewegung als eine *Drehung* um den Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Ist zudem $\alpha_0 = 0$, ist also die durch a gegebene Bewegung involutorisch, so sind außerdem alle zu $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ orthogonalen Punkte der Ebene $x_0 = 0$ Fixpunkte. Diese involutorische Drehung bezeichnen wir als die *Spiegelung* am Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ oder, da die Polare punktweise fest bleibt, auch als die Spiegelung an der Polaren von $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, also der Geraden $[a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, a_1a_2\alpha_3]$ als Achse.

Zu jedem Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $Q(a, a) \neq 0$ gibt es eine Spiegelung, die durch das Quaternion

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_1 i_2 \tag{3}$$

gegeben wird; dagegen gibt es keine Spiegelung an den Punkten, in denen die Form $Q(x, x)$ verschwindet. Entsprechend gibt es an jeder Geraden der Ebene eine Spiegelung, außer an denen, die den Kegelschnitt $Q(x, x) = 0$ berühren.

Die Drehungen um den Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ werden durch die Quaternionen (2) mit variablem α_0 dargestellt. Es gilt nun: Ist eine beliebige Drehung um $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gegeben und ist $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ein zu $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ orthogonaler Punkt mit $Q(b, b) \neq 0$, so gibt es genau einen Punkt $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, so daß die Drehung das Produkt der Spiegelungen an den Punkten b und c ist:

$$a = bc\,. \tag{4}$$

Ist nämlich etwa $\beta_3 \neq 0$, so ist die Determinante der ersten drei Gleichungen des sich aus **2**, (3) ergebenden Systems

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -a_1\beta_1\gamma_1 - a_2\beta_2\gamma_2 - a_1a_2\beta_3\gamma_3 \\ \alpha_1 &= a_2\beta_2\gamma_3 - a_2\beta_3\gamma_2 \\ \alpha_2 &= -a_1\beta_1\gamma_3 + a_1\beta_3\gamma_1 \\ \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{aligned} \tag{5}$$

gleich $-a_1a_2\beta_3Q(b, b)$, also ungleich Null, und die vierte Gleichung ist wegen $Q(a, b) = 0$ von den beiden vorhergehenden linear abhängig. Es gibt also genau ein c, das (5) erfüllt, und man bestätigt aus den drei letzten Gleichungen, daß auch $Q(a, c) = 0$ ist. Es gilt also

Satz 3. *Jede Drehung um einen Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist als Produkt der Spiegelungen an zwei zu $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ orthogonalen Punkten darstellbar, von denen der eine als ein beliebiger zu $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ orthogonaler Punkt gewählt werden kann, in dem die Form $Q(x, x)$ nicht verschwindet.*

Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Jede Drehung um einen Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ kann als Produkt von zwei Spiegelungen dargestellt werden, deren Achsen sich in $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ schneiden; dabei kann eine der beiden Achsen als eine beliebige Gerade durch $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, die nicht Tangente an den Kegelschnitt $Q(x, x) = 0$ ist, vorgegeben werden.

6. *Die Bewegungen einer ebenen Cayleyschen Geometrie.* Es ist nun noch die Frage offen, ob die Links- und Rechtsschiebungen des normalen Raumes die volle Bewegungsgruppe dieses Raumes liefern und ob die in **5** definierten Drehungen und Spiegelungen bereits die Gesamtheit der Bewegungen der ebenen Cayleyschen Geometrie erschöpfen. Um zunächst die zweite Frage zu beantworten, fragen wir nach einem Kriterium dafür, daß in der Ebene zwei Punkte durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können. Damit ein Punkt y in einen Punkt x mit $Q(x, x) \neq 0$ bewegt werden kann, ist notwendig, daß $\dfrac{Q(y, y)}{Q(x, x)}$ in K eine von Null verschiedene Quadratzahl ist; denn es muß $Q(y, y) = \lambda Q(x, x)$ und dabei λ nach **1**, (2) eine Quadratzahl sein. Wir wollen nun zeigen, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist.

Satz 4. *Damit in einer ebenen Cayleyschen Geometrie ein Punkt y mit $Q(y, y) \neq 0$ durch eine Bewegung in einen Punkt x mit $Q(x, x) \neq 0$ übergeführt werden kann, muß $\dfrac{Q(y, y)}{Q(x, x)}$ eine Quadratzahl in K sein; ist umgekehrt $\dfrac{Q(y, y)}{Q(x, x)}$ eine Quadratzahl, so gibt es bereits eine Spiegelung, die y und x ineinander überführt.*

Wir nennen einen Punkt m einen *Mittelpunkt* von x und y, wenn die Spiegelung an m die Punkte x und y vertauscht. Die Bedingung, daß $\dfrac{Q(y, y)}{Q(x, x)}$ eine Quadratzahl ist, ist nun gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei verschiedene Punkte x und y einen Mittelpunkt besitzen. Ist nämlich $m = (m_1, m_2, m_3)$ ein Mittelpunkt von $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$, so bedeutet dies nach der Definition, daß $Q(m, m) \neq 0$ ist und daß für die zugehörigen Quaternionen die Gleichung

$$\varrho x = m y \bar{m} \tag{1}$$

oder

$$\varrho' x m = m y \tag{2}$$

gilt. Zerlegt man diese Gleichung nach **2**, (3) in die vier Komponentengleichungen, so liefert die erste von ihnen

$$\varrho' Q(x, m) = Q(m, y) \tag{3}$$

und die drei letzten

$$\sigma m_i = \varrho' x_i + y_i\,, \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{4}$$

Es muß also

$$\varrho'(\varrho' Q(x, x) + Q(x, y)) = \varrho' Q(x, y) + Q(y, y)\,,$$

daher

$$\varrho' = \pm \sqrt{\frac{Q(y, y)}{Q(x, x)}}\,, \tag{5}$$

und also in der Tat $\dfrac{Q(y, y)}{Q(x, x)}$ eine Quadratzahl sein. Ist dies umgekehrt der Fall, so können wir rückwärts schließen, daß die Quaternionen, die den beiden Punkten m

und m' mit den Koordinaten

$$(6) \qquad \sigma m_i = \sqrt{\frac{Q(y,y)}{Q(x,x)}}\, x_i + y_i\,, \qquad \sigma m_i' = -\sqrt{\frac{Q(y,y)}{Q(x,x)}}\, x_i + y_i\,, \qquad i = 1,2,3$$

entsprechen, die Gleichung (1) erfüllen. Die beiden Punkte m und m' sind von einander verschieden und zu einander orthogonal. Sie sind Mittelpunkte von x und y, wenn ihre Formwerte $Q(m,m)$ und $Q(m',m')$ von Null verschieden sind. Verschwindet die Form in einem von ihnen, etwa in m, so liegt m' auf der Tangente, die den Kegelschnitt $Q(z,z)=0$ in m berührt, und es ist $Q(m',m') \neq 0$; es liegen dann auch x und y auf dieser Tangente. Hieraus folgt: Liegen die beiden Punkte x und y, für die $Q(x,x)$ und $Q(y,y)$ von Null verschieden und $\dfrac{Q(y,y)}{Q(x,x)}$ eine Quadratzahl ist, nicht auf einer Tangente an $Q(z,z)=0$, so ist sowohl $Q(m,m)$ als $Q(m',m')$ von Null verschieden; zwei solche Punkte besitzen also zwei verschiedene Mittelpunkte. Dagegen ist für zwei Punkte x und y mit den vorausgesetzten Eigenschaften, die auf einer Tangente liegen, stets der eine von den beiden Punkten m und m' der Berührungspunkt; zwei solche Punkte besitzen also genau einen Mittelpunkt.

Mit Hilfe von Satz 4 können wir nun leicht nachweisen, daß jede von der Identität verschiedene Bewegung der ebenen Cayleyschen Geometrie eine Drehung im Sinne der in 5 mit Hilfe der Quaternionen aufgestellten Definition ist. Wir zeigen dazu, daß jede Bewegung ein Produkt von Spiegelungen ist.

Ist eine Gerade g nicht Tangente an den Kegelschnitt $Q(x,x)=0$ und wählt man ein Polardreieck als Bezugssystem, in dem g als die Achse $x_1=0$ auftritt, so ist $\varrho x_1' = x_1$, $\varrho x_i' = -x_i$ $(i=2,3)$ die einzige von der Identität verschiedene Bewegung, die g punktweise fest läßt; denn in einer von der Identität verschiedenen Matrix, in der nur die Elemente der Hauptdiagonale von Null verschieden sind und $c_{22}=c_{23}$ ist, muß wegen der verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingungen 1, 4 $c_{11}=-c_{22}$ sein. Da andererseits die Spiegelung an g alle Punkte von g fest läßt, so ergibt sich: Die Spiegelung an einer Geraden ist die einzige von der Identität verschiedene Bewegung, die die Gerade punktweise fest läßt. Ist weiter ein Polardreieck gegeben, so erkennt man nun, indem man es als Bezugsdreieck wählt: Die einzigen von der Identität verschiedenen Bewegungen, die die Eckpunkte eines Polardreiecks in sich überführen, sind die Spiegelungen an den Seiten des Polardreiecks.

Es sei nun $\mathfrak{B}$ eine von der Identität verschiedene Bewegung, die einen Punkt x mit $Q(x,x) \neq 0$ fest läßt. Geht die Polare von x punktweise in sich über, so ist $\mathfrak{B}$ die Spiegelung an ihr. Geht sie nicht punktweise in sich über, so wähle man auf ihr einen Punkt y mit $Q(y,y) \neq 0$, der nicht Fixpunkt ist und in einen Punkt y' übergeht; es gibt dann nach Satz 4 eine Spiegelung $\mathfrak{S}$, die y und y' vertauscht und deren Achse durch x geht. Entweder ist nun $\mathfrak{B}=\mathfrak{S}$, oder $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ ist eine von der Identität verschiedene Bewegung, die die Punkte x, y und den dritten Eckpunkt des durch sie bestimmten Polardreiecks in sich überführt; $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ ist dann also eine Spiegelung $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{B}=\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$.

Ist nun $\mathfrak{B}$ eine beliebige Bewegung der Ebene und x ein Punkt mit $Q(x,x) \neq 0$, der durch $\mathfrak{B}$ in einen Punkt x' übergeführt wird, so gibt es nach Satz 4 eine Spiegelung $\mathfrak{S}$, die x und x' vertauscht; $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ ist dann eine Bewegung mit dem Fixpunkt x, also eine Spiegelung oder das Produkt von zwei Spiegelungen, und daher ist auch $\mathfrak{B}$ ein Spiegelungsprodukt.

Die in der Form 5, (1) darstellbaren Bewegungen erschöpfen also die Gesamtheit der Bewegungen der ebenen Cayleyschen Geometrie, und es ergibt sich

Satz 5. *Die Gruppe der Bewegungen einer ebenen Cayleyschen Geometrie mit der definierenden Form*

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2$$

über einem Körper K ist isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{M}((-a_1, -a_2), K)/\mathfrak{M}(K)$, der Faktorgruppe der multiplikativen Gruppe der Quaternionen nicht verschwindender Norm aus dem System $(-a_1, -a_2)$ nach der multiplikativen Gruppe von K. [10])

Jede von der Identität verschiedene Bewegung ist eine Drehung und jede Drehung nach **5** eine Spiegelung oder das Produkt von zwei Spiegelungen. *Die Bewegungsgruppe wird durch die Spiegelungen erzeugt.* Denkt man sich zunächst beliebige Spiegelungsprodukte geschrieben, so lassen sie sich nach den *Relationen*, die in den beiden folgenden Sätzen stecken, abbauen:

Satz 6. *In einem Polardreieck ist die Spiegelung an einem Eckpunkt gleich dem Produkt der Spiegelungen an den beiden anderen Eckpunkten.*

Satz 7. *Das Produkt der Spiegelungen an drei Punkten, die in einer Geraden liegen, ist wiederum eine Spiegelung an einem Punkte dieser Geraden.*

Als Sätze über Spiegelungen an Geraden ausgesprochen: Die Spiegelung an einer Seite eines Polardreiecks ist gleich dem Produkt der Spiegelungen an den beiden anderen Seiten, und das Produkt von drei Spiegelungen, deren Achsen durch einen Punkt gehen, ist wiederum eine Spiegelung, deren Achse durch diesen Punkt geht. Satz 6 und Satz 7 sind unmittelbare Folgerungen aus Satz 3; Satz 6 ergibt sich, wenn man Satz 3 auf die involutorische Drehung um $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ anwendet. Nach Satz 6 bilden die Spiegelungen an den Eckpunkten eines Polardreiecks eine Vierergruppe, wenn man die Identität hinzunimmt, sie sind also insbesondere vertauschbar. Aus Satz 7 folgt nebenbei, daß die Gruppe der Drehungen um einen Punkt kommutativ ist. Satz 6 und Satz 7 liefern zusammen mit den in der Definition der Spiegelungen enthaltenen Relationen $\mathfrak{S}^2 = 1$ alle Relationen zwischen Spiegelungen.

7. *Die Bewegungen eines normalen Cayleyschen Raumes.* Aus dem Ergebnis von **6** folgt nun auch, daß jede Bewegung des normalen Cayleyschen Raumes das Produkt einer Links- und einer Rechtsschiebung ist, daß also die Gruppe der in der Gestalt **4**, (4) darstellbaren Bewegungen die volle Bewegungsgruppe des Raumes ist.

Es gibt keine von der Identität verschiedene Bewegung des Raumes, die in der Ebene $x_0 = 0$ die Identität ist. Denn die einzige von der Identität verschiedene Projektivität, bei der die Polarität erhalten und die Ebene $x_0 = 0$ punktweise fest bleibt, ist die Transformation $\varrho x_0' = x_0$, $\varrho x_i' = -x_i (i = 1, 2, 3)$; sie ist aber keine Bewegung. Da also eine Bewegung, die in der Ebene $x_0 = 0$ die Identität ist, im ganzen Raum die Identität ist, kann eine Bewegung der Ebene $x_0 = 0$ nur in einer Bewegung des Raumes, und zwar in einer Bewegung mit dem Punkt $e = (1, 0, 0, 0)$ als Fixpunkt enthalten sein. Also folgt aus der Tatsache, daß die in der Gestalt **5**, (1) darstellbaren Bewegungen die Bewegungen der Ebene erschöpfen, daß sie auch die Bewegungen des Raumes, die den Punkt e fest lassen, erschöpfen.

Es sei nun $\mathfrak{B}$ eine beliebige Bewegung des Raumes, und es werde der Punkt e in einen Punkt z übergeführt. Ist $\mathfrak{L}$ die Linksschiebung, die z in e überführt, so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{B}$ eine

[10]) Da $\mathfrak{M}((-1, 1), K)$ zu der Gruppe der nicht singulären zweireihigen Matrizen über K isomorph ist, ist die Bewegungsgruppe einer ebenen Cayleyschen Geometrie, deren Form die Null darstellt, zu der binären projektiven Gruppe über K isomorph — ein Zusammenhang, der im Falle des Körpers der reellen Zahlen, insbesondere aus der Darstellbarkeit der Bewegungsgruppe der hyperbolischen Geometrie durch gebrochene lineare Transformationen von $x + iy$ mit reellen Koeffizienten, wohlbekannt ist (vgl. F. Klein, a. a. O. [2]), S. 309).

Bewegung, die den Punkt e fest läßt, also von der Gestalt **5**, (1); und da $\mathfrak{L}$ durch die Quaternionengleichung $\varrho y' = z^{-1}y$ dargestellt wird, ist $\mathfrak{B}$ von der Gestalt

$$\varrho x' = zax\bar{a}\,,$$

also von der Gestalt **4**, (4).

Wir erhalten also das Ergebnis:

Satz 8. *Die Gruppe der Bewegungen eines normalen Cayleyschen Raumes mit der definierenden Form*

$$x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2$$

über einem Körper K ist isomorph zu dem direkten Produkt zweier Gruppen, die zu der Gruppe $\mathfrak{M}((-a_1, -a_2), K)/\mathfrak{M}(K)$ isomorph sind.

Eingegangen 24. April 1939.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 182

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1940